

- Literatur:
- H. Goldstein "Klassische Mechanik" / "Classical mechanics"
  - Landau-Lifschitz Theoret. Physik I
  - A. Budó "Theoretische Mechanik"
  - T.W.B. Kibble "Classical mechanics"

Grundbegriffe: Masse, Zeit, Raum/Koordinaten, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Energie

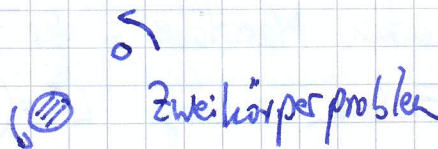
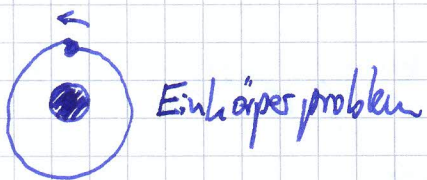
Aufgabe der Mechanik: • Beschreibung der Bewegung materieller Körper  
• Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichungen


Grundlage: Newton'sche Axiome: gewonnen durch Verallgemeinerung von Beobachtungen (Experimenten). Diese Axiome sind nicht weiter herleitbar.

Gültigkeitsbereich: • Klassische Mechanik verliert ihre Gültigkeit für Vorgänge im atomaren Bereich  $\rightarrow$  Quantenmechanik (Poissonklammern klass. Analogformulierung)  
• oder wenn Teilchengeschwindigkeit vergleichbar mit Lichtgeschwindigkeit wird  $\rightarrow$  Relativitätstheorie (21)

## Einteilung der Mechanik:

- Mechanik des Massenpunktes: Körper ist (relativ) so klein, dass man ihn als Punkt betrachten kann. Bsp.: Erdbewegung um Sonne. Nicht: Erdbewegung um eigene Achse



Drei Körperproblem  über längere Beobachtungsdauer wird Bewegung chaotisch & die Bewegung im Phasenraum statistisch  $\rightarrow$  Stat. Mech.



2 1887: König Oskar II. von Schweden. Preisfrage: Ist das Sonnensystem stabil?  
Preis an Poincaré (löst Problem nicht, aber beweist Unlösbarkeit)

Mechanik der Punktsysteme: endliche Zahl von Massenpunkten

Man kann alle Gleichungen für ein solches Problem aufstellen.  
Die Lösung ist nur möglich, wenn best. Symmetrien vorliegen, oder durch Simulation

Mechanik des starren Körpers: Man kann von relativer Verschiebung der einzelnen Massenpunkte absehen. Solch ein Körper hat 6 Freiheitsgrade, für die wir 6 Differentialgleichungen 2. Ordnung aufstellen werden.

Kontinuumsmechanik: Man betrachtet nur solche Bewegungen des Körpers, bei denen benachbarte Moleküle annähernd dieselbe Bewegung ausführen  
→ Kontinuumsmechanik möglich. Anstatt vieler gekoppelter gewöhnlicher DGLn brauchen wir nur wenige partielle DGLn.

Zwei Gebiete: - Elastomechanik: Moleküle stark aneinander gebunden  
Beschreibung von Verschiebungen versus Spannungen

- Hydrodynamik (Gase, Flüssigkeiten): Moleküle nur schwach aneinander gebunden

Physikalische Einheiten: Länge, Zeit, Masse      cm, sec, g      (cgs)

z. Bsp.  $[v] = \text{cm/sec}$ ;  $[a] = \text{cm/sec}^2$

Gibt es elementare Massstäbe in der Physik?

→ Planck-Einheiten      Länge  $L^* = (\hbar G / c^3)^{1/2} = 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$

Zeit  $T^* = (\hbar G / c^5)^{1/2} = 5.4 \cdot 10^{-44} \text{ sec}$

Mass  $M^* = (\hbar c / G)^{1/2} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ g}$



# I. Mechanik des Massenpunktes:

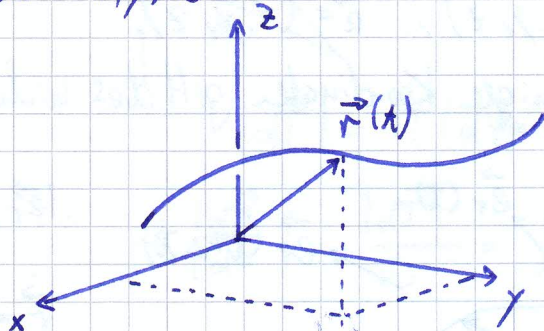
## 1.) Grundbegriffe der Kinematik (Lehre der Bewegung)

Hier fragen wir nach der Bewegung (Ort, Geschwindigkeit), nicht nach deren Ursache (Kräfte).

Die Lage / Ort des Massenpunktes geben wir relativ zu einem anderen Körper an. Ort durch drei Koordinaten gegeben:  $x, y, z$

Bewegungsverlauf gegeben durch Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



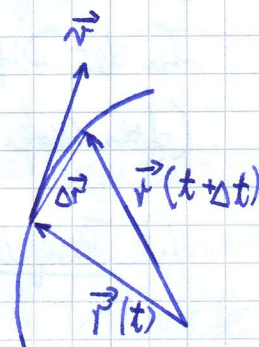
Geschwindigkeit:  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Komponente  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ ,  $v_z = \dot{z}$

Der Vektor  $\vec{v}$  weist in Richtung der Bahn tangente,

denn 
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



$|\vec{v}| = v$  ist die momentane Geschwindigkeit

Beschleunigung:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

Höhere zeitl. Ableitungen spielen in der Mechanik keine Rolle



## 2.) Zerlegung der Geschwindigkeit & Beschleunigung nach versch. Koordinaten.

Nur in kartesischen Koordinaten

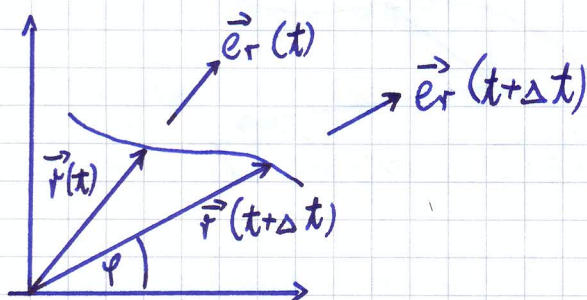
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

kann man die Komponenten der Ableitungen einfach bekommen, da sich beim Differenzieren die Einheitsvektoren nicht ändern:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z, \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\text{oder } \vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad \vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}).$$

In krummlinigen Koordinaten gilt dies nicht immer, z. Bsp. Polarkoordinaten



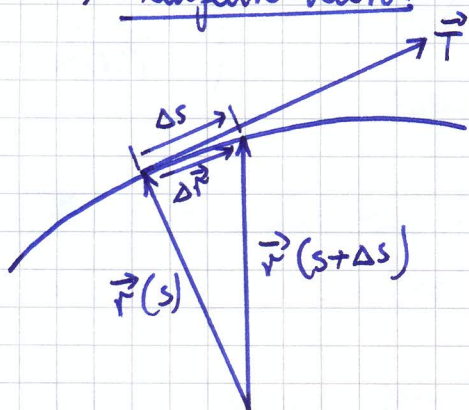
$$|\vec{e}_r| = 1; \quad \vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

$$\text{i. allg. } \dot{\vec{e}}_r \neq 0$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Komponenten der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponenten aufzuspalten. In der Differentialgeometrie wird einer Raumkurve  $\vec{r}(t)$  ein Dreier (drei aufeinander senkrecht Einheitsvektoren) zugeordnet.

### 1.) Tangentialvektor



$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \quad \therefore |\vec{T}| = 1.$$

Mit der Bogenlänge  $s$  schreiben wir  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , so dass

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \therefore |\vec{T}| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1, \text{ siehe Figur links}$$

2.) Normalenvektor  $\vec{N}$  liegt in der Schmiegeebene der Raumkurve & zeigt nach der konkaven Seite. Es gilt

$$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|}$$

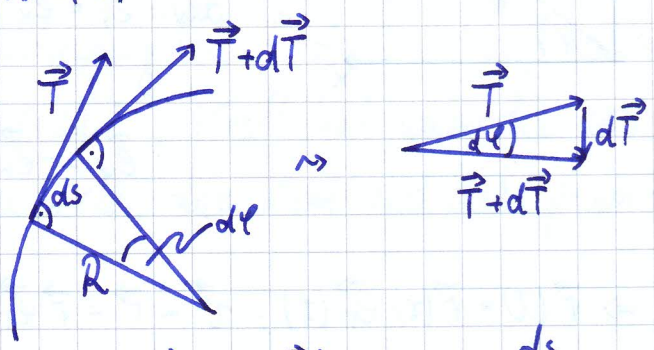
$$\text{Wegen } \vec{T}^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} = 1, \text{ d.h. } \dot{\vec{T}}^2 = 2\vec{T} \cdot \dot{\vec{T}} = 0 \\ \leadsto \vec{N} \text{ steht auf } \vec{T} \text{ senkrecht } \square$$



Weiter gilt

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \dot{\vec{T}} = |\dot{\vec{T}}| \cdot \vec{N} = \underbrace{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|}_{\frac{1}{R}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v = |\vec{v}|} \vec{N} = \frac{v}{R} \vec{N}$$

Hierbei ist  $\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \frac{1}{R}$  der reziproke Krümmungsradius:



$$|d\vec{T}| = |\vec{T}| d\varphi = d\varphi = \frac{ds}{R}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \frac{|d\vec{T}|}{ds} = \frac{1}{R}$$

3.) Binormalvektor steht auf  $\vec{T}$  &  $\vec{N}$  senkrecht:  $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

Zerlegung der Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v \vec{T}) = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{v}{R} \vec{N}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} = a_t \vec{T} + a_n \vec{N}$$

Die Beschleunigung besitzt sowohl Tangential- als auch Normalrichtung. Die Tangential- oder Bahnbeschleunigung  $a_t = dv/dt = \dot{v}$  ist leicht verständlich. Sie tritt auch bei linearer Beschleunigung auf. Die Normal- oder Zentripetalbeschleunigung  $a_n = v^2/R$  tritt nur bei nichtgeradlinig verlaufender Bewegung auf.

Höhere Ableitungen werden i.d.R. nicht gebraucht. Mathematisch kann man sie durch die Frenet'schen Formeln erhalten. Hierbei ist  $1/R_2$  die 2. Krümmung bzw. Windung. Sie gibt an, wie stark sich die Bahnkurve aus der Schmiegeebene herauswindet.

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{1}{R} \vec{T} + \frac{1}{R_2} \vec{B}$$

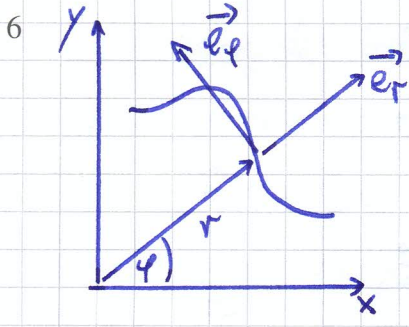
$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{1}{R_2} \vec{N}$$

Zerlegung in ebene Polarkoordinaten einer Bewegung in einer Ebene

$$r = r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\varphi = \varphi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$$





Für die Einheitsvektoren in r- und phi-Richtung gilt:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_r$$

Bew.:  $\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi \rightsquigarrow \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \underbrace{(-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi)}_{\vec{e}_\varphi}$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi \rightsquigarrow \dot{\vec{e}}_\varphi = \dot{\varphi} \underbrace{(-\vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi)}_{-\vec{e}_r}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r(t); \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Radial- und phi-Komponente der Geschwindigkeit & Beschl. lauten also

$$v_r = \dot{r} \quad \wedge \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \quad \wedge \quad a_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$$

doppelte "Flächengeschwindigkeit"

Keine phi-Komponente der Beschleunigung  $\rightarrow$  Flächengeschw. konstant (2. Keplergesetz).

### 3. Dynamik des Massenpunktes, Newton'sche Axiome, Kraft und Masse.

Dynamik = Lehre von den Kräften. Sie untersucht, welchen Einfluss die Kräfte auf die Bewegung des Massenpunktes ausüben. Die Grundgesetze dieser Dynamik sind in den drei (bzw. vier) Newton'schen Axiomen enthalten.

1.) Newtonaxiom, Trägheitsgesetz: Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch von außen einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Hier: Kraft = äussere Einflüsse

Bem.: Geradlinigkeit der Bewegung ist bezugssystemabhängig! Als Bezugssyst. wählen wir ein Inertialsystem, das ist die Sonne mit den Fixsternen als Richtungen. Ein sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit dazu bewegendes System ist ebenfalls ein Inertialsystem.



2.) Newtonaxiom, Grundgleichung der Dynamik: Im Inertialsystem muss die auftretende Beschleunigung eines Körpers von der Einwirkung anderer Körper herühren: diese Körper üben eine Kraft auf den beobachteten Körper aus. Aus Erfahrung wissen wir, dass die Beschleunigung eines Körpers einer Anstrengung bedarf, die wir Kraft nennen, und die umso grösser ist, je grösser die Beschleunigung ist. Kraft hat ausserdem eine Richtung. Nach dem 2. Newtonaxiom nehmen wir an, dass Kraft und Beschl. proportional sind:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Die Proportionalitätskonstante nennen wir (träge) Masse, eine dem Körper eigene Konstante. Aus Erfahrung nehmen wir an, dass die ~~Kraft~~ Masse additiv ist und wir nicht zw. träger und schwerer Masse unterscheiden müssen.

Bem.: Bei hohen Geschwindigkeiten hängt  $m$  von  $v$  ab. Nach der speziellen Relativitätstheorie muss man dann

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F} \text{ schreiben, mit } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$m_0$  ← Ruhemasse  
 $c$  ← Lichtgeschw.

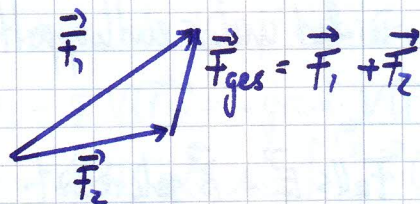
Das Newtonsche Grundgesetz erlaubt uns:

- (a) bei geg. Kraft  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  die Bahnkurve auszurechnen, oder
- (b) bei geg. Bahnkurve das Kraftgesetz zu bestimmen.

(3.) Newtonaxiom, Wechselschwirkung: Die auf einen Körper wirkende Kraft stammt nicht von Körper selbst, sondern es muss mind. noch ein anderer Körper vorhanden sein, von dem die Kraftwirkung ausgeht. Erfahrungsgemäss übt dann auch der erste Körper eine Kraft auf den zweiten aus. Das 3. Axiom sagt aus, dass diese beiden Kräfte dem Betrag nach gleich sind, aber entgegengesetzte Richtung haben

$$\vec{F}_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \text{von Körper 1 auf den} \\ \text{Körper 2 wirkende Kraft} \end{array} \right\} = - \vec{F}_{21}$$

Kurz: actio = reactio



(4.) Newtonaxiom, Superpositionsprinzip:

Mehrere an einem Körper wirkende Kräfte addieren sich zu einer Gesamtkraft:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum \vec{F}_i$$



#### 4.) Bewegungsgleichung einer freien Massepunktes:

Frei: nicht auf einer Bahn oder sonstwie geführt. z. Bsp. beim mathemat. Pendel ist der Massepunkt nicht frei. Ist Kraft  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  gegeben, so findet man die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  aus der Differentialgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \text{ also } \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(\dots) \\ m\ddot{z} &= F_z(\dots) \end{aligned}$$

I. allg. haben wir es also mit 3 gekoppelten DGLn 2. Ordnung zu tun. Die allg. Lösung enthält somit 6 unabh. Integrationskonstanten. Diese lassen sich durch Vorgabe von Anfangswerten bestimmen:  $x(t_0) = x_0, \dots, v_x(t_0) = v_{x,0}, \dots$

Die Lösung ist dann eindeutig.

Beispiele: (1.) Schwerkraft



$$\begin{aligned} \vec{F} &= -mg\vec{e}_z \\ m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} = -mg\vec{e}_z \end{aligned}$$

→ entkoppelte System  $\ddot{x} = \ddot{y} = 0, \ddot{z} = -g$

$$\Rightarrow \dot{x} = c_1 \leadsto x(t) = c_1 t + c_4$$

$$\dot{y} = c_2 \leadsto y(t) = c_2 t + c_5$$

$$\dot{z} = -gt + c_3 \leadsto z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3 t + c_6$$

$$\text{AWP: } t=0: x=y=z=0 \text{ und } v_x=v_y=v_z=0 \leadsto x=y=0 \wedge z = -\frac{g}{2}t^2$$

(2.) Elektr. geladener Massepunkt im EM-Feld:

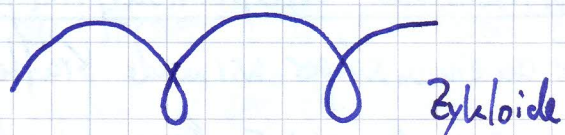
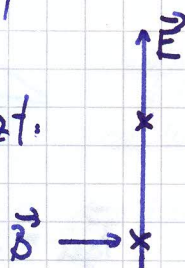
$$\vec{F} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

$\uparrow$  Ladung       $\uparrow$  elektr. Feld       $\uparrow$  magnet. Feld

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q \left[ E_x + \frac{1}{c} (\dot{y} B_z - \dot{z} B_y) \right] \\ m\ddot{y} &= q \left[ E_y + \frac{1}{c} (\dot{z} B_x - \dot{x} B_z) \right] \\ m\ddot{z} &= q \left[ E_z + \frac{1}{c} (\dot{x} B_y - \dot{y} B_x) \right] \end{aligned}$$

nicht mehr entkoppelt!

Falls  $\vec{E}$  &  $\vec{B}$  gekreuzt:





5.) Arbeit und kinetische Energie: Wir haben  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \leadsto$  multipliziere mit  $\dot{\vec{r}}$ : 9

$$m \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}. \text{ Mit } \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}})^2 = 2 \dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) dt = \left[ \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right]_{t=t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} m \vec{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$  ist die kinetische Energie

$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$  ist die Arbeit der Kraft längs der Kurve von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$ .

$$\Rightarrow \text{Satz von der kinetischen Energie: } \underline{\underline{T_2 - T_1 = A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}}}$$

$A > 0$ :  $T_2 > T_1$ ,  $\leadsto$  Teilchen wird schneller.

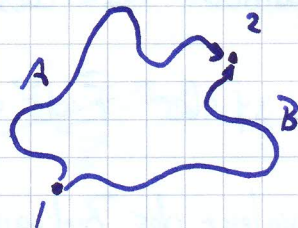
6.) Konservatives Kraftfeld, potentielle Energie, Energiesatz:

Wir betrachten spezielle Kräfte, für die wir voraussetzen, dass sie

1.) nur von Ort abhängen, d.h. nicht von  $\dot{\vec{r}}$

2.) bei denen die Arbeit wegunabhängig ist:

$$\int_A^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_B^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$



$$\leadsto \int_A^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} - \int_B^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_A^1 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_2^1 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

Das Umlaufintegral über eine beliebige geschlossene Kurve ergibt null.

Solche Kräfte heißen konservativ. Konservative Kraftfelder können skalar oder vektoriell sein:  $S = S(\vec{r})$  oder  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$

Die Arbeit hängt genau dann nicht vom Weg ab, wenn die Kraft als Gradient eines Skalarfeldes dargestellt werden kann:  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$

$$\text{Bew.: Hinreichend: } \oint \vec{F} d\vec{r} = -\oint \nabla V(\vec{r}) d\vec{r} = -\oint dV = 0, \text{ da } \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \quad \square$$



Notwendig:  $V(\vec{r}_2) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$   $V$  hängt nur von  $\vec{r}_1$  &  $\vec{r}_2$  ab, da wegunabh.

Nun ist  $\frac{\partial}{\partial x_2} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left( \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2 + \epsilon \vec{e}_x} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_2 + \epsilon \vec{e}_x} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \vec{F}(\vec{r}_2 + \theta \epsilon \vec{e}_x) \cdot \epsilon \vec{e}_x \quad \therefore 0 \leq \theta \leq 1$

$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{F}(\vec{r}_2 + \theta \epsilon \vec{e}_x) \vec{e}_x = F_x(\vec{r}_2)$

$\Rightarrow \nabla_2 V = - \nabla_{\vec{r}_2} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \vec{F}$  □

Weitere notwendige und hinreichende Bedingungen für  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ :

Wie kann man beurteilen, ob man ein Kraftfeld als Gradienten eines Skalarfeldes schreiben kann? Mit dem Stokes'schen Satz gilt

$0 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A(C)} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{a}$



Dies muss für jede bel. Kurve C gelten

$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F} = 0$  wirbelfrei

Ausgeschrieben lautet diese Bedingung:  $\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$

Damit ist aber  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  ein vollständiges Differential, d.h.  $dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$

Äquivalent der Bedingungen:  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla V \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$

Der Name konservativ kommt also daher, dass bei dieser Art Feld die Energie bei der Bewegung erhalten bleibt. Denn:

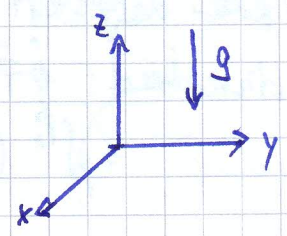
$T_2 - T_1 = A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(V_2 - V_1)$  und somit  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\Rightarrow E = T + V = \text{const.}$

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie in einem konservativen Kraftfeld bleibt erhalten.

Bsp.: (1) Schwerfeld der Erde nahe der Erdoberfläche

$F_x = F_y = 0; F_z = -mg = \text{const.} \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$





$$V(x, y, z) = mgz + \text{const.}; \quad \vec{F} = -\nabla V$$

$$\text{Energiesatz} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgz = E_{\text{ges}}$$

$$\text{Ist am Erdboden } (z=0) \text{ die Geschw. } v=v_0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\leadsto v = \sqrt{v_0^2 - 2gz} \text{ muss reell sein} \leadsto v_0^2 \geq 2gz \Rightarrow \text{max. Höhe } h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Darstellung von Potential- und Kraftfeldern: Ein Skalarfeld kann man durch die Niveauflächen  $V(x, y, z) = \text{const.}$  darstellen. In 2D:

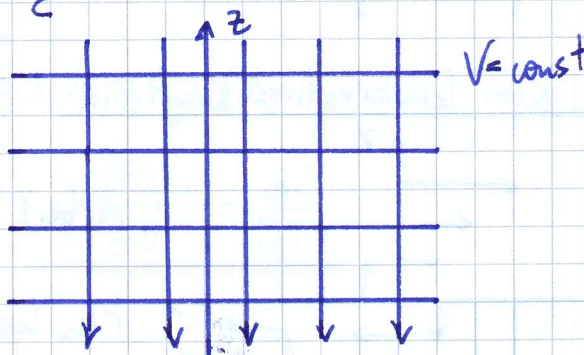
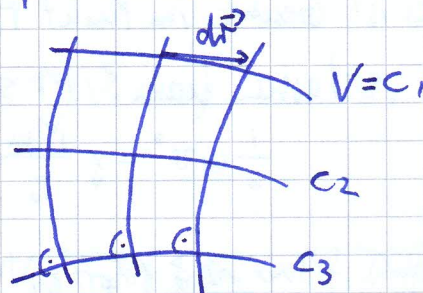
Wegen  $\vec{F} = -\nabla V$  stehen dann die Feldlinien auf den Linien  $V = \text{const}$  senkrecht

$$\text{Denn } V(\vec{r} + d\vec{r}) = V(\vec{r}) + \nabla V d\vec{r} + \dots$$

$$\text{Damit ist auf einer Niveaufläche } \underbrace{V(\vec{r} + d\vec{r})}_{c} - \underbrace{V(\vec{r})}_{c} = 0 = \nabla V d\vec{r}$$

$\nabla V$  und damit  $\vec{F}$  steht auf der Niveaufläche also senkrecht

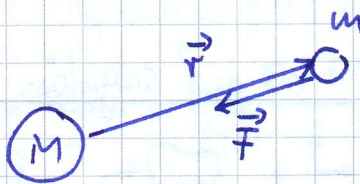
Beim Schwerfeld der Erde sind die Äquipotentialflächen  $z = \text{const.}$  & die Feldlinien sind parallel zur neg. z-Achse



## (2.) Newtonsches Gravitationsgesetz:

Zwei punktförmige Massen  $M$  &  $m$  erfahren eine ggs.

Anziehungskraft des Form



$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \therefore \gamma = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{sec}^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Das Potential ist  $V(\vec{r}) = V(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} + \text{const.}$ ; fordern wir  $V(\infty) = 0 \Rightarrow \text{const.} = 0$ .

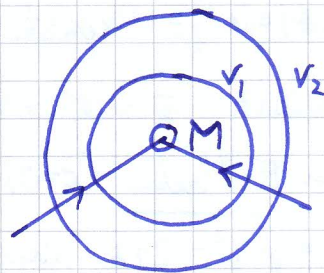
$$\text{grad in Kugelkoord.: } \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow -\nabla V(\vec{r}) = +\gamma \vec{e}_r Mm \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r = \vec{F} \quad \square$$

Übg.: Zeige die Identität  $\vec{F} = -\nabla V$  in kartes. Koord., wenn  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Die Linien  $V(r) = \text{const.}$  sind Kugelflächen um Masse  $M$ , falls das Potential bezugs in betrachtet wird



Energiesatz:  $\frac{1}{2} M v^2 - \gamma \frac{M m}{r} = \text{const.}$

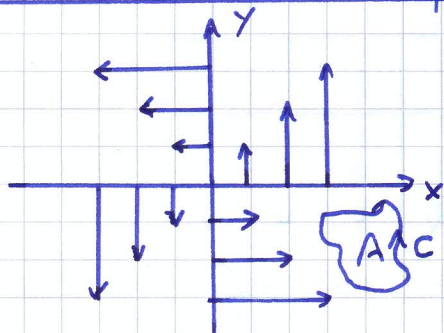
Was ist Geschw. im Punkt  $r_0$ , damit Masse  $m$  den Anziehungsbereich der grossen Masse  $M$  verlassen kann?  $M$  sei in Ruhe:

$$\frac{1}{2} M v^2 - \gamma \frac{M m}{r_0} = \frac{1}{2} M v^2 (r = \infty) \geq 0$$

$$\Rightarrow v \geq v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2\gamma M m}{r_0}}$$

Fluchtgeschwindigkeit von der Erde:  $v_{\text{Flucht}} = \sqrt{2g r_0} = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$

(3.) Kern konservatives Kraftfeld:  $F_x = -ay$ ,  $F_y = ax$ ,  $F_z = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 2a \vec{e}_z$

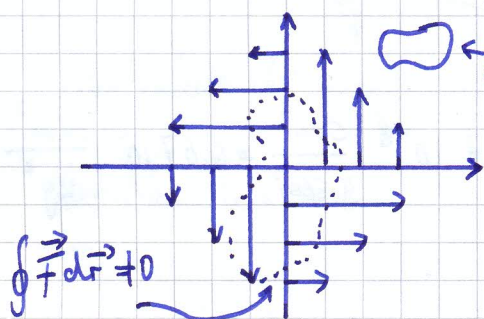


Arbeit ist wegsabhängig

Man kann zeigen:  $\oint \vec{F} d\vec{r} = 2aA$

ungeschlossene Fläche in x-y Ebene

(4.)  $\nabla \times \vec{F} = 0$  bis auf singuläre Linien:



$$\oint \vec{F} d\vec{r} \neq 0$$

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

$$F_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$F_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$F_z = 0$$

$$\Rightarrow (\text{rot } \vec{F})_z = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \text{ für } x, y \neq 0$$

Je nachdem, ob Ursprung umflogen wird oder nicht, wird Integral ungleich oder gleich 0.

Zeitabhängiges Potential: Konservative Kräfte sind zeitunabhängig & wirbel frei:

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad \wedge \quad \vec{F} = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t)$$



Jetzt betrachten wir ein explizit zeitabhängiges wirbelfreies Feld (Bsp. E-Feld im EM-Feld): 13

$$\nabla \vec{F}(\vec{r}, t) = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla V(\vec{r}, t) \quad \text{Bew. wie vorher (partielle Abl.)}$$

Was passiert mit Energiesatz?

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \wedge \quad \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} dt = T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}, t) \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

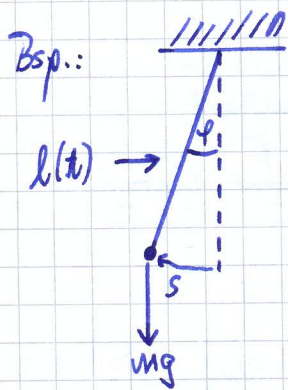
$$\leadsto T_2 - T_1 = - \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \underbrace{\nabla V(\vec{r}, t(\vec{r}))}_{dV} d\vec{r} \stackrel{?}{=} - (V(\vec{r}_2, t_2) - V(\vec{r}_1, t_1))$$

$\leadsto T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = E = \text{const.}$ ? Nein, denn  $\nabla V d\vec{r}$  ist kein vollst. Differential

Nur  $(\nabla V(\vec{r}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \nabla t(\vec{r})) d\vec{r}$  wäre vollst.

Die Energie wird zeitabhängig  $E_{\text{ges}} = T + V(x, y, z, t) = E_{\text{ges}}(t)$

$$\text{Denn } \frac{dE_{\text{ges}}}{dt} = \underbrace{m\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} + \nabla V \cdot \dot{\vec{r}}}_{= 0 \text{ wg. Bewegungsgl.}} + \frac{\partial V}{\partial t} \leadsto \frac{dE_{\text{ges}}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}$$



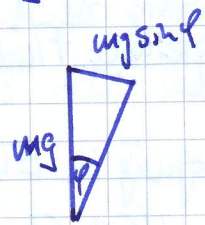
Feder, bei dem die Länge mit Frequenz  $\omega$  geändert wird:

$$l(t) = l_0 + \Delta l \sin \omega t \leadsto E_{\text{ges}} = \frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{mg}{l(t)} \frac{s^2}{2}$$

aus Bewegungsgl. für kleine  $\phi$ :  $\ddot{s} + \frac{g}{l(t)} s = 0$

denn Kraft in s-Richtung:  $mg \sin \phi \approx mg \frac{s}{l(t)}$

Aufschaukelung bei  $\omega = 2\sqrt{g/l_0}$



7. Zentralkräfte: sind Kräfte, deren Richtung immer durch einen best. räumlichen Punkt (Zentrum) gehen. Sonst können sie beliebig von Ort & Zeit abhängen. Zählen wir den Ortsvektor von diesem Zentrum aus, so gilt  $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \vec{r}$ .

Bsp.: (1) Gravitationskraft  $\vec{F} = -\frac{\gamma M m}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$



(2.) Konstante Schwerkraft:  $\vec{F} = -mg \vec{e}_z$  (Zentrum im unendlichen)

(3.) 3D harmonischer Oszillator  $\vec{F} = -K \vec{e}_r \cdot r = -K \vec{r}$

Diese Kräfte sind zudem konservativ.

Bewegung eines Massenpunktes in einem Zentralfeld heisst Zentralbewegung.

Erhaltungssatz:  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \vec{r} \quad | \times \vec{r} \text{ von links}$

$$m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \text{wegen } \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \Rightarrow \underline{\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c} = \text{konst. Vektor}}$$

$\Rightarrow$  (1.)  $\vec{r} \perp \vec{c}$ ,  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \perp \vec{c} \Rightarrow$  Bewegung verläuft in Ebene, welche durch das Zentrum geht und senkrecht auf  $\vec{c}$  steht.

(2.) Die in der Zeit  $dt$  von Radiusvektor  $\vec{r}$  überstrichene Fläche ist  $dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$ , d.h. die Flächengeschwindigkeit ist konstant:  
 $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{1}{2} |\vec{c}| = \text{const.}$

Da Gravitationskraft eine Zentralkraft ist, gilt bei Planetenbewegung:

Die Bewegung verläuft eben, der Radiusvektor überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen (2. Keplersches Gesetz).

Bewegung in Ebene: ebene Polarkoordinate  $\Rightarrow$  keine  $\varphi$ -Beschleunigung. Wie gezeigt (Seite 6), gilt  $r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$   $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$  ist gerade wieder die Flächengeschwindigkeit.

Drehmoment und Drehimpuls: aus  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$  folgt  $m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{N} = \vec{r} \times (m \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}$  Drehimpuls;  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  Drehmoment:  $\vec{N} = \vec{M}$  analog zu  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

Bei Zentralkräften ist das Drehmoment bezügl. des Zentrums null, d.h.

der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße.

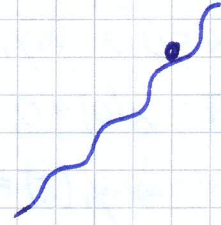


## (8.) Eingeschränkte Bewegung eines Massepunkts, Reibung:



Beim Pendel bewegt sich der Massepunkt i. allg. auf einer Kugelfläche

Oder: Massepunkt gleitet auf einer Fläche:



Die vorgeschriebenen Zwangsbedingungen lassen sich dadurch ausdrücken, dass der Massepunkt dauernd auf einer Fläche oder Kurve (= Schnitt zweier Flächen) bleiben muss  $\rightarrow$  Koordinaten des Massepunktes müssen Gleichung einer Fläche bzw. Kurve erfüllen:

$$f(x, y, z, t) = 0 \text{ bzw. } f_1(x, y, z, t) = 0 \wedge f_2(x, y, z, t) = 0$$

Ruhet die Fläche oder Kurve, so tritt hierbei  $t$  nicht auf.

Unter Präsenz einer Zwangsbedingung tritt neben der äußeren oder eingepprägten Kraft noch eine zusätzliche Kraft auf, die von der Zwangsbed. herrührt:

$$m \vec{v} = \vec{F} + \vec{F}'$$

Zunächst betrachten wir solche Bewegungen, bei denen die Führung keine Kräfte in tangentialer Richtung ausübt, also keine Reibung. Dann steht Zwangskraft senkrecht auf Führung mit zunächst unbekanntem Betrag. Da der Gradient der Funktion  $f(x, y, z, t)$  auf der Fläche  $f(x, y, z, t) = 0$  senkrecht steht, muss  $\vec{F}'$  die Form  $\vec{F}' = \lambda \nabla f$  annehmen, wobei  $\lambda = \lambda(t)$ .

$\rightarrow$  Bewegungsgleichung:  $m \vec{v} = \vec{F} + \lambda \nabla f \wedge f(x, y, z, t) = 0$

Diese stellen Lagrange-Gleichungen des 1. Art dar: 4 Glm für 4 unbekannte Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\lambda(t)$ .

Bei Bewegung auf einer Kurve:  $\vec{F}' = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 \rightarrow \vec{F}'$  steht auf Schnittkurve der beiden Flächen senkrecht.

$$\rightarrow m \vec{v} = \vec{F} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 \wedge f_1 = 0 \wedge f_2 = 0.$$

Der Fall mit 3 Flächen ist uninteressant.



16 Bsp.: Massepunkt auf der ruhenden schiefen Ebene.

(1.) Übliches Verfahren:

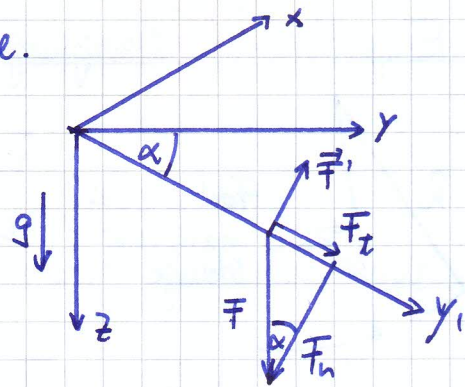
$$F = mg \rightsquigarrow \vec{F}_x = mg \cdot \sin \alpha$$

$$\vec{F}_n = mg \cdot \cos \alpha$$

$$m\ddot{x} = 0 \wedge m\ddot{y}_1 = \vec{F}_x = mg \cdot \sin \alpha$$

$$\text{AWP: } \dot{x}(0) = 0, x(0) = 0; \dot{y}_1(0) = 0, y_1(0) = 0$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$



(2.) Behandlung mit allg. Verfahren:  $f(x, y, z) = z - y \tan \alpha = 0$  Gl. der schiefen Ebene

$$\rightsquigarrow \nabla f(x, y, z) = 0 \cdot \vec{e}_x - \tan \alpha \vec{e}_y + 1 \cdot \vec{e}_z \wedge m\ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} = -\lambda \tan \alpha \wedge m\ddot{z} = mg + \lambda \wedge z = y \tan \alpha.$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = mg + \lambda = m\ddot{y} \tan \alpha = -\lambda \tan^2 \alpha$$

$$\rightsquigarrow mg + \lambda = -\lambda \tan^2 \alpha \Rightarrow \lambda = -mg \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = -mg \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = -mg \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} F_y' &= -\lambda \tan \alpha = mg \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -F_{ny} \\ F_z' &= +\lambda = -mg \cos^2 \alpha = -F_{nz} \end{aligned} \right\} \vec{F}' = -\vec{F}_n$$

Die Zwangskraft macht also die Normalkomponente von  $\vec{F}$  wirkungslos.

Bewegungsgl.:  $m\ddot{x} = 0$

$$m\ddot{y} = +mg \cos^2 \alpha \tan \alpha = mg \sin \alpha \cos \alpha$$

$$m\ddot{z} = mg - mg \cos^2 \alpha = mg \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= 0, y = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cos \alpha t^2 = y_1(t) \cos \alpha \\ z &= \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha t^2 = y_1(t) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Resultat gleich zu} \\ \text{Punkt (1), wie es sein muss} \end{array}$$

Arbeit der Zwangskraft: ruht Fläche  $\rightsquigarrow$  keine Arbeit, da  $\vec{F}' \perp$  Fläche bzw.

$d\vec{r} \perp \vec{F}'$ . Bewegte Fläche  $\rightsquigarrow$  Arbeit:

$$dA = \vec{F}' \cdot d\vec{r} = \lambda \nabla f \cdot d\vec{r}$$

aus  $f(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) = 0, f(\vec{r}, t) = 0$  folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \Rightarrow dA = -\lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt$$



$$\frac{dA}{dt} = -\lambda \frac{\partial A}{\partial t}$$

Allgemeinere Form der Bedingungsgleichung. Differentielle Form von  $f(x, y, z, t) = 0$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \nabla f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

$$\text{bzw. } \nabla f \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Allgemeinere Form kann geschrieben werden als  $(a_i = a_i(x, y, z, t))$ :  $a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a_4 dt = 0$ .

$$\text{bzw.: } a_1 \dot{x} + a_2 \dot{y} + a_3 \dot{z} + a_4 = 0$$

Gilt  $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$  usw.  $\rightarrow dA = 0$  ist vollst. Potential mit Lösung  $A = C$ , wobei sich  $C$  aus den Anfangsbed. ergibt. Mit  $f = A - C = 0$  erhalten wir die alte Bedingungsgl.

Ist  $a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a_4 dt = 0$  kein vollst. Potential, kann dies durch geeignete Multiplikation mit einem integrierenden Faktor  $\mu$  jedoch dazu gemacht werden.

Bsp.:  $yx - xy = 0$  bzw.  $y dx - x dy = 0$  ist kein vollst. Differential, da  $1 = \frac{\partial y}{\partial y} \neq \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$ .

Multiplik. mit  $\frac{1}{x^2 + y^2} \rightarrow dA = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  ist vollst.

Es ist dann  $A(x, y) = -\arctan y/x = C$ . Dies lässt sich als  $f(x, y) = y - \tan C = 0$ :

$\tan C = \tan(-C)$  umschreiben.

Können, mit Hilfe eines multiplikativen integrierenden Faktors oder ohne, die Zwangsbed. als Gleichung <sup>id. ob. Form</sup> ausgedrückt werden, so ist die Zwangsbed. holonom (oder integrierbar).

NB: Bei nur zwei Variablen  $\exists$  immer ein integrierender Faktor. Sei

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \rightarrow$  man kann die Lösung  $y = y(x, C)$  in der Form  $A(x, y) = C$

schreiben  $\Rightarrow dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0$

$\Rightarrow$  Integr. Faktor wird damit zu  $\mu = \frac{1}{P} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial A}{\partial y}$

Anholonome Zwangsbedingungen: kann es als Gleichung nur bei mehr als 2 Variablen geben. Haben wir  $P dx + Q dy + R dz$ , dann ist notw. & hinreichende Bedingung, dass

$$\text{integr. Faktor } \exists: P \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$$

Ist linke Seite  $\neq 0 \rightarrow$  kein integr. Faktor (vgl. Smirnow, Lehrgg. Höh. Math. II S. 216).



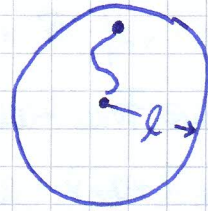
18 Bsp.:  $P=Q=1$ ,  $R=y-x \rightsquigarrow$  Linke Seite  $= 2 \neq 0 \Rightarrow$  kein integr. Faktor.

Skleronome und rheonome Bedingungen: Kommt Zeit in den  $q_i$  nicht explizit vor und es ist  $a_4=0$ : skleronome Bedingung. Sonst rheonom.

$f(x,y,z)=0$  ist somit holonom & skleronom

Einseitige Bedingungen: Zwangsbed. ist Ungleichung

Bsp.: Fadenpendel:  $r^2 \leq l^2$



Freiheitsgrade: = # unabhängiger Koordinaten, die zur Bestimmung der Lage des Massenpunkts notwendig sind. Jede holonome Bed. reduziert die Anzahl um 1:

# = 3 ohne Zwangsbed.

2 eine Zwangsbed. ( $f(P,t)=0$ )

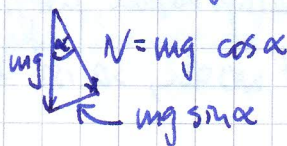
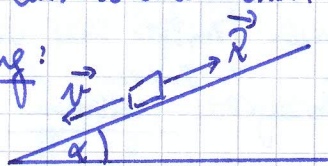
1 zwei Zwangsbed. (vorgeg. Kurve)

0 drei Zwangsbed. (festgelegt. Punkt)

Nichtholon. Bed. schränken # Fb im endlichen nicht ein (s. später).

Reibung: Wir unterscheiden Gleit- & Haftreibung sowie Flüssigkeitsreibung.

(1) Gleitreibung:



Coulomb-Reibungsgesetz  $\vec{R} = -\gamma N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ,  $\gamma$  = Reibungskoeff.

$\vec{R}$  immer antiparallel zu  $\vec{v}$  und nur von Richtung von  $\vec{v}$  abhängig.

Bewegungsgl. auf schiefer Ebene:

$$m\ddot{s} = mg \sin \alpha - \gamma mg \cos \alpha \rightsquigarrow \ddot{s} = g(\sin \alpha - \gamma \cos \alpha)$$

Der mit einer best. Anfangsgeschw. abgestossene Körper bewegt sich mit konstanter Geschw. auf einer schiefer Ebene, die den Reibungswinkel  $\varphi$  hat:  $\tan \varphi = \gamma$ .

(2) Haftreibung: Körper bleibt so lange in Ruhe, solange Tangentialkraft kleiner als Koeffizient mal Normalkraft:  $F_t \leq \gamma_0 N$ . Es gilt  $\gamma_0 > \gamma$ .

(3) Flüssigkeitsreibung:  $\vec{R} = -K \vec{v}$ ; Kugel (Stokes):  $K = 6\pi a \eta$   $\leftarrow$  Viskosität  
Radius  $\uparrow$

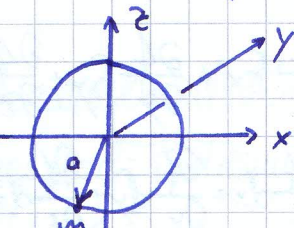


Bem.: (1.) Gleitreibung unabh. von  $|\vec{v}|$ : Zwei Potentialeoberflächen mit best. typischer Profilhöhe reiben aneinander  $\rightarrow$  Kraft unabh. von der Profilhöhe, nicht  $|\vec{v}|$ . Im Ggs. in einer Flüssigk. kommt die Reibung durch die Umströmung durch eine viskose Flüssigk.  $\rightarrow |\vec{v}|$ -abhängig.

(2.) Bei höheren Geschwindigkeiten kommen höhere Potenzen von  $|\vec{v}|$  im Reibungsgesetz vor.

### (9.) Gleichgewicht des Massenpunktes, Prinzip der virtuellen Arbeit:

Problem der Stabilität: Bedingung, damit Massenpunkt in Ruhe bleibt:  $\vec{F} + \vec{F}' = 0$ . Unter diesem Gleichgewicht ruht der Körper oder bewegt sich mit konst. Geschw. Ist ein Körper an einer Fläche gebunden, so gilt  $\vec{F} + \lambda \nabla \phi = 0$ , mit  $\phi(x, y, z, t) = 0$ , da  $\vec{F}' \perp$  Fläche. Bei vorgeg. Fläche und Kraft  $\vec{F}$  haben wir 4 Glu. für 4 Unbekannte  $x, y, z, \lambda$ .

Bsp.:  Sphäre mit massenloser Stange  
 $\vec{F} = -mg \vec{e}_z$ ;  $\phi(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$   
 $\nabla \phi = 2x \vec{e}_x + 2y \vec{e}_y + 2z \vec{e}_z = 2\vec{r}$

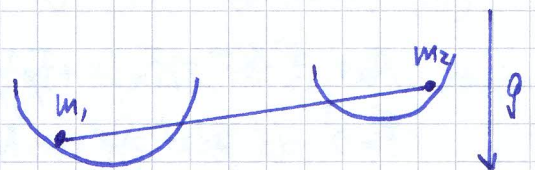
Bed.  $\vec{F} + \lambda \nabla \phi = 0$  lautet in Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} F_x + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 + \lambda \cdot 2x = 0 \\ F_y + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 + \lambda \cdot 2y = 0 \\ F_z + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} &= -mg + 2\lambda z = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x = y = 0, \quad mg &= 2\lambda z \\ \phi = 0: x^2 + y^2 + z^2 - a^2 &= z^2 - a^2 = 0 \\ \Rightarrow z = \pm a; \quad \lambda &= \pm \frac{mg}{2a} \end{aligned}$$

Am obersten & untersten Punkt der Kugel-Fläche

ist Massenpunkt im Glgw. Ob. Punkt: instabiles Glgw., unteres Pkt. stabil

Die Stabilität ist bei komplizierteren Systemen nicht mehr sofort ersichtlich. Bsp. zwei starr verbundene Massenpunkte in zwei Kugelschalen



Prinzip der virtuellen Arbeit: Anderer Weg, Stabilität eines Systems zu untersuchen.

(a.) Freies Massenpunkt: Ein freies Massenpunkt ist im Gleichgewicht, wenn  $\vec{F} = 0$ . Wir ersetzen nun diesen Punkt in Gedanken eine sehr kleine (infinitesimale) Verdrängung  $\delta \vec{r}$ : virtuelle Verschiebung, im Ggs. zu einer wirklichen Verdrängung  $d\vec{r}$ . Erfolgt die wirkliche



Verrückung in endlicher Zeit, so geschieht die virtuelle instantan. ( $\delta t = 0, v = \infty$ ).

Im Glgw. gilt dann:  $\vec{F} = 0$  oder  $\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = 0$  virtuelle Arbeit

Def. des Gleichgewichts: der freie Massenpunkt ist genau dann im Glgw., wenn die bei einer beliebigen virtuellen Verrückung geleistete Arbeit null ist.

Vorteil: funktioniert auch unter Zwangsbedingungen.

(b.) Unfreies Massenpunkt: Ein an einer Fläche oder Kurve gebundener Massenpunkt ist genau dann im Glgw., wenn die Arbeit der eingepprägten ~~äußeren~~ Kräfte bei jeder beliebigen, mit der Zwangskraft verträglichen, virtuellen Verrückung verschwindet:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

Die Nebenbedingung ist dann hier  $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r} + \delta \vec{r}, t) = 0$ .

D.h. bei einer virtuellen Verrückung ist  $\nabla \varphi \delta \vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0$

während bei einer wirklichen Ver.  $\nabla \varphi d\vec{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$

Bei skleronomen Bedingungen braucht nicht zw. wirklicher & virtueller Verrückungen unterschieden werden.

Beh.:  $\vec{F} + \vec{F}' = \vec{F} + \lambda \nabla \varphi = 0 \Leftrightarrow \delta A = 0$

Bew.: (i.)  $\vec{F} + \vec{F}' = 0 \Rightarrow \delta A = 0$ . Aus der Def. der virtuellen Arbeit ist  $\vec{F}' \cdot \delta \vec{r} = 0$   
 $\Rightarrow (\vec{F} + \vec{F}') \cdot \delta \vec{r} = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}' \cdot \delta \vec{r} = \delta A = 0$ .

(ii.)  $\delta A = 0 \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}' = 0$ .

Aus  $\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$  folgt unter einer Zwangsbed. nicht unbedingt  $\vec{F} = 0$ , da jetzt  $\delta \vec{r}$  die Nebenbed.  $\nabla \varphi \delta \vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0$  erfüllt.

Man berücksichtigt die Nebenbed. wieder mit einem Lagrange-multiplikator  $\lambda$ :

$$\underbrace{\delta A}_{\vec{F} \cdot \delta \vec{r}} + \lambda \underbrace{\nabla \varphi \delta \vec{r}}_{=0} = 0 \text{ bzw.: } (\vec{F} + \lambda \nabla \varphi) \cdot \delta \vec{r} = (F_x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \delta x + (F_y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \delta y + (F_z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}) \delta z = 0$$



2 Grössen (z. Bsp.  $\delta y$  &  $\delta z$ ) können beliebig gewählt werden, die dritte nicht.  
 Wir können aber  $\lambda$  so wählen, dass  $\vec{F}_x + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ , wobei prinzipiell  $\lambda$  von  $x, y, z$  abhängen kann. Da aber nun  $\delta y$  und  $\delta z$  beliebig sind, müssen auch die anderen Klammern verschwinden:  $F_y + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ ;  $F_z + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow$  Symmetr. Glu.:  $F_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$  oder  $\vec{F} + \lambda \nabla \phi = 0$

Anwendung auf konservative äussere Kräfte:

Wegen  $\vec{F} = -\nabla V \rightsquigarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = -\nabla V \delta \vec{r} = -\delta V = 0 \Rightarrow \delta V = 0$ .

Bei konservativen äusseren Kräfte besteht dann Gilgw., wenn bei einer virtuellen Verschiebung die Änderung der potentiellen Energie verschwindet, d.h., das Potential einen Extremwert besitzt.

Beim Lagrange-Multiplikator bei Extremumsaufgaben mit Nebenbedingungen:

Frage nach Extremum von  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  unter Nebenbed.  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

Wähle  $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = F + \lambda \phi \rightsquigarrow$  freies Extremum von  $G$ :

$\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$ ;  $\frac{\partial G}{\partial \lambda} = \phi = 0$ .

Bsp.:  $F = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ;  $\phi = x_1 + x_2 + \dots + x_n - 1 \Rightarrow G = \sum x_i^2 + \lambda (\sum x_i - 1)$

$\rightsquigarrow \frac{\partial G}{\partial x_i} = 2x_i + \lambda = 0$ ;  $\frac{\partial G}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + \dots + x_n - 1 = 0$

$\Rightarrow x_i = -\lambda/2$ ;  $\sum x_i = 1 = -\frac{n\lambda}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -2/n$

$\Rightarrow x_i = 1/n$ .

10.) D'Alembertsches Prinzip: Herleitung der Bewegungsgln. aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit

Gleichgew.:  $\vec{F} + \vec{F}' = 0$ ; Dynamik:  $m\vec{r}'' = \vec{F} + \vec{F}'$  bzw.  $\vec{F} + \vec{F}' + \vec{F}^* = 0$ ;  $\vec{F}^* = -m\vec{r}''$

D'Alembertsche Freigheitskraft:  $\vec{F}^* = -m\vec{r}'' \rightsquigarrow$  Reduktion auf Gilgw.-problem.

$\rightsquigarrow$  Beim Prinzip der virtuellen Arbeit muss also die Arbeit der Kraft  $\vec{F} + \vec{F}' - m\vec{r}''$  verschwinden:

$\delta A = (\vec{F} - m\vec{r}'') \cdot \delta \vec{r} = (\vec{F} + \vec{F}^*) \delta \vec{r} = 0$

Damit folgt aus Analogie:  $\vec{F} + \vec{F}^* + \lambda \nabla \phi = 0$ , d.h.  $m\vec{r}'' = \vec{F} + \lambda \nabla \phi$ .



Man kann also das dynamische Problem formal auf ein statisches zurückführen, wenn zu den eingeprägten Kräften die d'Alembertsche Trägheitskraft addiert wird.

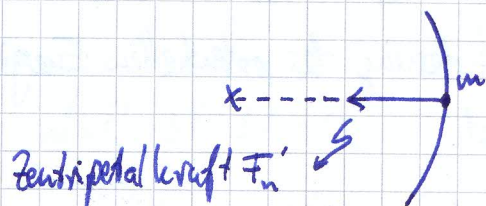
Dynamische und statische Kraftauffassung: Das Newtonsche Grundgesetz kann auf 2 Arten interpretiert werden:

(1.) Dynamische Kraftauffassung Kraft ist Ursache der Bewegung

(2.) Statische Kraftauffassung Auf dem beschleunigten Körper wirkt die d'Alembertsche Trägheitskraft  $\vec{F}^* = -m\vec{a}$ . Die Resultierende aller Kräfte ist null.

Bsp.: (1) Geschwindigkeitskonstante Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn:

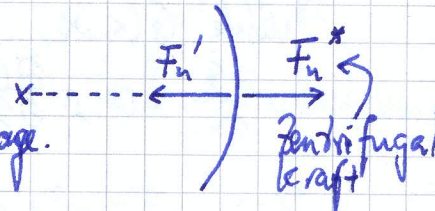
- dyn. Auffassung:



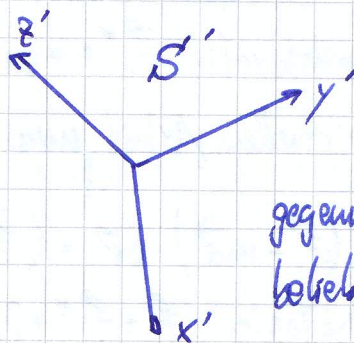
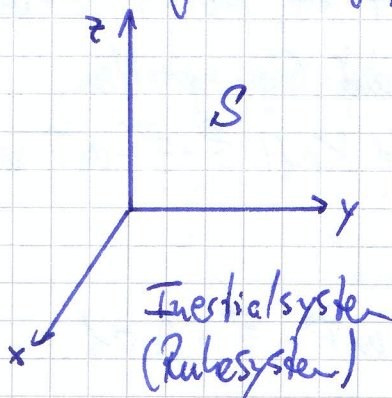
Die Zentripetalbeschleunigung wird von der in derselben Richtung liegenden Zentripetalkraft verursacht, d.h. die Führung übt die  $F_n' = \frac{mv^2}{R}$  auf den Körper aus.

- stat. Auffassung: Die d'Alembertsche Trägheitskraft

hält sich mit der Zentripetalkraft die Waage.



11.) Bewegte Bezugssysteme. Die Grundgl.  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$  gilt nur in einem Inertialsystem, also einem System, dessen Achsen sich nicht gegenüber dem Fixsternhimmel bewegen, oder sich geradlinig gleichförmig dazu bewegen. Ein mit der Erde verbundenes System ist streng genommen kein Inertialsystem, für viele Fälle ist der Unterschied jedoch unbedeutend. Ein bewegtes Fahrzeug ist dagegen kein Inertialsystem. Trotzdem kann es sinnvoll sein, das Fahrzeug als Bezugssystem zu benutzen.

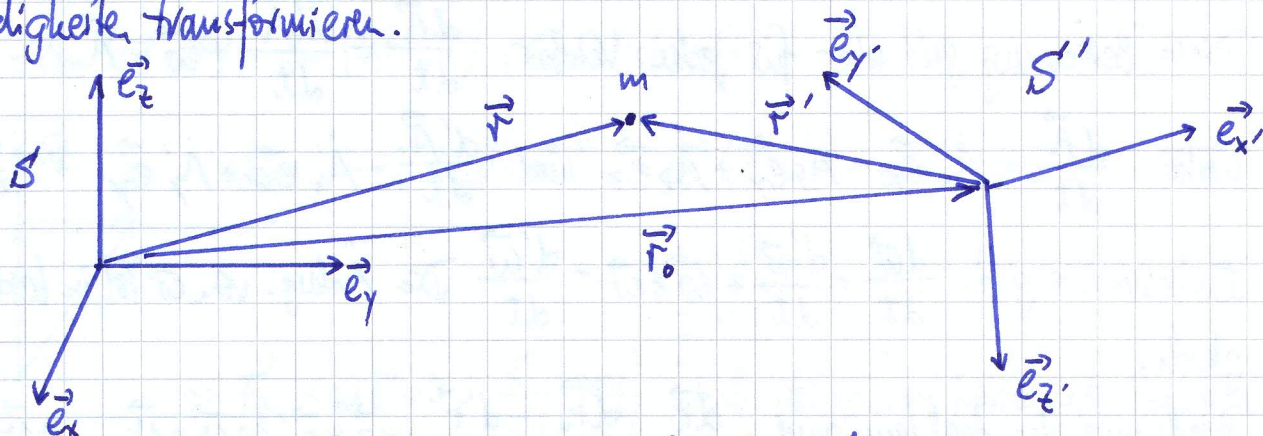


gegenüber dem Inertialsystem beliebig bewegtes System.



In  $S$  gilt:  $m\vec{r} = \vec{F}$ , wohingegen in  $S'$ :  $m\vec{r}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Schein}}$

In  $S'$  treten gegenüber  $S$  Zusatzkräfte auf, die wir Scheinkräfte  $\vec{F}_{\text{Schein}}$  nennen.  
Ist speziell  $\vec{F} = 0$ , so ist in  $S'$  die Bahn i. allg. gekrümmt, in  $S$  geradlinig gleichförmig.  
 $\Rightarrow$  um von  $S$  nach  $S'$  umzu rechnen bzw. umgekehrt, müssen wir die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten transformieren.



Es gilt also  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$ . Die  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sind abh. Fktn. der Zeit:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dx'}{dt} \vec{e}_x' + \frac{dy'}{dt} \vec{e}_y' + \frac{dz'}{dt} \vec{e}_z' + x' \frac{d\vec{e}_x'}{dt} + y' \frac{d\vec{e}_y'}{dt} + z' \frac{d\vec{e}_z'}{dt}$$

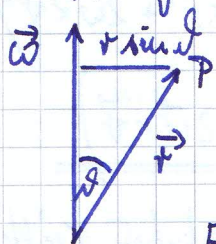
N.B.: Die Zeit  $t$  soll sich nicht transformieren  $\Leftrightarrow$  Geschwindigkeit  $\ll c$ .

Geschwindigkeit in  $S$ :  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

Wir definieren in  $S'$ :  $\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{e}_x' + \frac{dy'}{dt} \vec{e}_y' + \frac{dz'}{dt} \vec{e}_z'$ .

$\vec{v}_{\text{trans}} = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Ursprung von  $S'$  gegen den von  $S$  bewegt. Die Geschwindigkeit  $x' \frac{d\vec{e}_x'}{dt} + y' \frac{d\vec{e}_y'}{dt} + z' \frac{d\vec{e}_z'}{dt}$  kommt also durch die Bewegung des Systems  $S'$  zustande.

Beschreibung der Drehung: Eine momentane Drehung wird durch den Vektor der Winkelgeschwindigkeit beschrieben: Richtung von  $\vec{\omega}$ : Drehachse



Vorzeichen: Rechtsschraube bzw. Korkeenzieherregel

$$\text{Betrag: } |\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}'|}{r \sin \alpha}$$

Ein Punkt  $P$  außerhalb der Drehachse besitzt dann die Geschw.  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

In unserer Notation gilt also:

$$x' \frac{d\vec{e}_x'}{dt} + y' \frac{d\vec{e}_y'}{dt} + z' \frac{d\vec{e}_z'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$



I. allg.  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ : Betrag und Drehachse richtung ändern sich mit  $t$ , damit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Wegen  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}'$  gilt also:  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

Diese Beziehung gilt aber für jeden Vektor:  $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$

wobei:  $\frac{d\vec{A}}{dt} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$  und  $\frac{d'\vec{A}'}{dt} = A'_x \vec{e}'_x + A'_y \vec{e}'_y + A'_z \vec{e}'_z$

Inbesondere gilt:  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d'\vec{\omega}'}{dt}$  Die Änderung von  $\vec{\omega}$  ist in beiden Systemen gleich.

Berechnung der Beschleunigung:  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \rightsquigarrow \vec{v} = \vec{v}_{\text{trans}} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

Setze  $\vec{A} \equiv \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{v}_{\text{trans}}}{dt}}_{\vec{a}_{\text{trans}}} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}'}{dt} \therefore$

$$\frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_{\text{trans}} + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{\text{trans}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Bewegungsgleichung im System  $S'$ : Im Inertialsystem  $S$  gilt  $m\vec{a} = \vec{F}$

Im bewegten System haben wir demnach  $m(\vec{a}' + \vec{a}_{\text{trans}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}') = \vec{F}$

In  $S'$  lassen wir die Striche weg:  $m\vec{r}'' = \vec{F} - (\vec{a}_{\text{trans}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}')$

Im Nichtinertialsystem wird die Bewegungsgl. recht kompliziert. Die zusätzlichen Kräfte nennen wir Scheinkräfte, so dass  $m\vec{r}'' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Schein}}$ .

Verschiedene Terme der Scheinkraft  $\vec{F}_{\text{Schein}}$ :

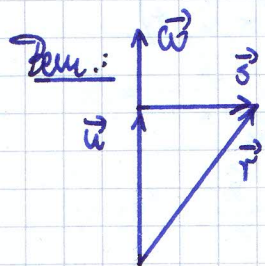


$\vec{F}_x = -m \vec{a}_{\text{trans}}$  Trägheitskraft der Translationsbeschleunigung

$\vec{F}_z = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  Zentrifugalkraft

$\vec{F}_{\text{rot}} = -m \vec{\omega} \times \vec{v}$  Trägheitskraft der Rotationsbeschleunigung

$\vec{F}_C = -2m (\vec{\omega} \times \vec{v}) - 2m (\vec{v} \times \vec{\omega})$  Corioliskraft



wegen  $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{\omega} (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) + \vec{r} \vec{\omega}^2 = -\vec{u} \vec{\omega}^2 + \vec{r} \vec{\omega}^2$

$$= (\vec{r} - \vec{u}) \omega^2 = \vec{s} \omega^2$$

$\Rightarrow \vec{F}_z = m \vec{s} \omega^2 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \frac{m v^2}{|\vec{s}|}$  gleich der zuvor berechneten Zentrifugalkraft

Spezialfälle: (1.) Reine Translation ( $\vec{\omega} = 0$ ):

(a.)  $S$  &  $S'$  gleichförmig geradlinig:  $\vec{a}_{\text{trans}} = 0$ :  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$   $S'$  ist ebf. Inertialsystem  
Zugrunde liegt Galilei-Transformation  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t$ . Die Grundgleichung der Mechanik ist unter einer Galilei-Transformation invariant.

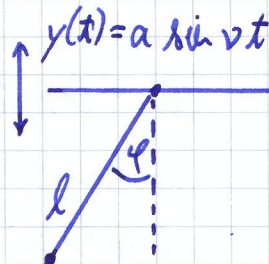
Relativitätstheorie: Lorentztransform.:  $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ;  $y' = y$ ;  $z' = z$ ;  $t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$v$  klein gegen  $c$ : Reduktion auf Galilei-Transformation

(b.)  $\vec{a}_{\text{trans}} \neq 0$ :  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_x = \vec{F} - m \vec{a}_{\text{trans}}$  D'Alembertkraft der Translationsbeschleunigung wird hinzugeaddiert.

Bsp.: Aufhängepunkt beim Pendel wird periodisch

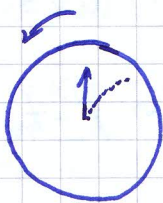
bewegt:  $\ddot{\varphi} + \frac{g(t)}{l} \varphi = 0$ :  $g(t) = g_0 - \ddot{y} = g_0 + av^2 \sin vt$



2.) Bewegtes System rotiert mit konst. Winkelgeschw.:  $\vec{a}_{\text{trans}} = 0$ ;  $\vec{\omega} \neq 0$ .

$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} - \underbrace{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{F}_z} - \underbrace{2m (\vec{\omega} \times \vec{v})}_{\vec{F}_C}$  Die Corioliskraft tritt nur auf, wenn sich der Massenpunkt bewegt.

Bsp.: Rotierende Scheibe



Der Massenpunkt bewegt sich im Inertialsystem geradlinig. Auf der rotierenden Scheibe ist die Bahn gekrümmt.  $\rightarrow$  Corioliseffekt.



Wirkung der Corioliskraft auf der Erde: Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Vertikalen, seitliche Kraft auf die Schienen eines in Nord-Süd-Richtung fahrenden Zuges, Foucault'scher Pendelversuch (dynam. Beweis der Erdrotation).

12.) Geradlinige Bewegung, freier Fall aus grosser Entfernung.

Wir behandeln nun einige konkrete Probleme aus der Dynamik des Massenpunktes.

Zunächst behandeln wir rein eindimensionale Probleme:  $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ .

Spezialfälle: (a.)  $F(x, \dot{x}, t) = F(t)$ :  $m\ddot{x} = F(t)$  oder  $\ddot{x} = F(t)/m$

$$\Rightarrow \dot{x} = \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} dt' + C_1$$

$$x(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \frac{F(t'')}{m} dt'' dt' + C_1(t-t_0) + C_2$$

mit  $x(t_0) = x_0$  und  $v(t_0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 \wedge C_2 = x_0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} F(t'') dt'' dt' + v_0(t-t_0) + x_0$$

mit partieller Integration können wir das Doppelintegral umformen:

$$\int_{t_0}^t (t-t') F(t') dt'$$

Speziell für  $F(t) = mg = \text{const.}$  folgt  $x(t) = \frac{1}{2} g(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + x_0$ .

(b.)  $F(x, \dot{x}, t) = F(x)$ . Ein solches Kraftfeld hat immer ein Potential  $V(x) = -\int_{x_0}^x F(x') dx'$ .

$\Rightarrow$  Konservatives Kraftfeld  $\Rightarrow$  Energiesatz  $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{Ges}} = E = \text{const.}$

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{2/m(E - V(x'))}} = t + c; \quad x(t) \text{ erhält man durch Bilden des Umkehrfunktion.}$$

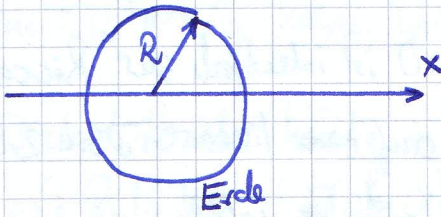
(c.)  $F(x, \dot{x}, t) = F(\dot{x})$  nur Reibungskräfte:  $m\ddot{x} = F(\dot{x})$  oder  $m\dot{v} = F(v)$

$\Rightarrow$  DGL 1. Ordnung  $\therefore \frac{m dv}{F(v)} = dt \Rightarrow t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')} \Rightarrow v = v(t-t_0)$

$$\text{und dann } x(t) = \int_{t_0}^t v(t'-t_0) dt' + x_0$$



(d.) Freier Fall aus grosser Entfernung ohne Luftwiderstand



$$m\ddot{x} = -\frac{\gamma M m}{x^2} = F(x); \quad x \geq R$$

Bei kugelsymm. Massenverteilung können wir bei  $x \geq R$  so tun, als ob die Erdmasse im Erdmittelpunkt vereinigt wäre.

Wegen  $g = \gamma M / R^2$  können wir schreiben:

$$\ddot{x} = -\frac{R^2}{x^2} g \rightsquigarrow V(x) = -\int^x F(x') dx' = -\frac{m R^2}{x} g \rightsquigarrow \text{Energiesatz lautet}$$

$$\left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{R^2}{x} g\right) = \frac{E_{\text{ges}}}{m} = C_1; \quad \text{AWP: } t=0, x=x_0, v=0 \rightsquigarrow C_1 = -R^2 g / x_0$$

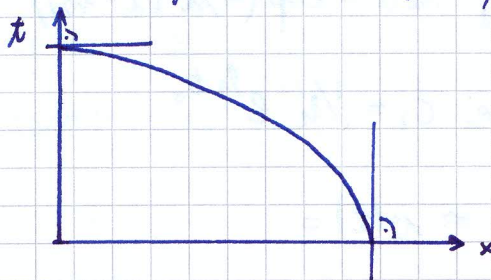
$$\frac{dx}{dt} = v = -R \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \quad \text{Minuszeichen, da Geschw. negativ sein muss}$$

$$t = -\frac{1}{R\sqrt{2g}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{1/x' - 1/x_0}} + C_2; \quad C_2 = 0 \text{ wegen AWP}$$

$$\Rightarrow t = t(x) = -\frac{1}{R\sqrt{2g}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{1/x' - 1/x_0}}; \quad \xi^2 \equiv \frac{x'}{x_0}$$

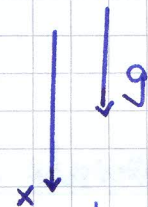
$$\rightsquigarrow z \equiv \int_x^{x_0} \frac{dx'}{\sqrt{1/x' - 1/x_0}} = 2x_0^{3/2} \int_{\sqrt{x/x_0}}^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2x_0^{3/2} \left[ -\frac{\xi}{2} \sqrt{1-\xi^2} + \frac{1}{2} \arccos \xi \right]_{\sqrt{x/x_0}}^1$$

$$= \sqrt{x_0} \underbrace{\sqrt{x(x_0-x)}}_{\text{finite time singularity}} + x_0^{3/2} \arccos \sqrt{x/x_0}$$



(e.) Freier Fall im homogenen Schwerfeld mit Luftwiderstand

$m\ddot{x} = ?$  Bei höheren Geschwindigkeiten wächst die Reibung mit höheren Potenzen der Geschwindigkeit ("dissipative Nichtlinearität"). Für den freien Fall gilt die Gleichung  $m\dot{v} = mg - K v^2$  von Typ der Riccati-Gleichungen (Jacopo Francesco Conte Riccati, 1724). Ist  $v$  klein, so wächst es mit  $g$ , wird  $v$  gross, so erzeugt der quadratische Term eine Deckelung des Betrags von  $v$ .





Lösung der Riccati Gleichung  $= \frac{v}{m} + \frac{k}{m} v^2 = g$   $v + v^2 = M$ :  $M = mg/k$  und  $t \rightarrow \frac{k}{m} t$   
 Definiere  $w(t) = \exp\left\{\int^t v(t') dt'\right\}$ .

$\Rightarrow w = v w \wedge \dot{w} = v w + v^2 w \Rightarrow \dot{w} - M w = 0$  ist identisch zur Riccati Gl.

$\leadsto$  Die Transformation  $w$  reduziert die Riccati Gl auf eine lineare Dgl 2. Ordng.

Lösung:  $w(t) = A e^{\sqrt{M} t} + B e^{-\sqrt{M} t}$  und somit  $v(t) = \frac{d}{dt} \log w(t)$

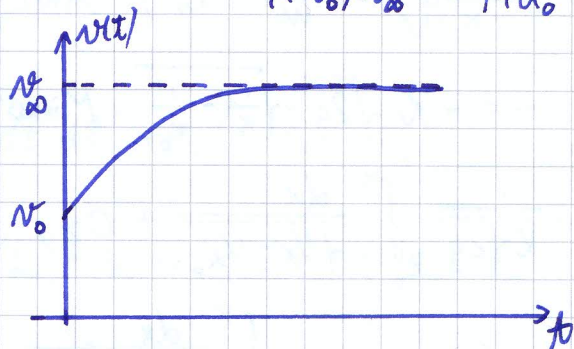
$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{M} \frac{e^{\sqrt{M} t} - h e^{-\sqrt{M} t}}{e^{\sqrt{M} t} + h e^{-\sqrt{M} t}} \quad \therefore h = B/A$$

$$v_0 = v(0) = \sqrt{M} \frac{1-h}{1+h}; \quad v_\infty = \sqrt{M} \leadsto h = \frac{1-v_0/\sqrt{M}}{1+v_0/\sqrt{M}} = \frac{1-u_0}{1+u_0}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_\infty \frac{1-h \exp(-2\sqrt{M} t)}{1+h \exp(-2\sqrt{M} t)}$$

man kann zeigen:

$$v(t) = v_\infty \frac{u_0 + \tanh \frac{gt}{v_\infty}}{1 + u_0 \tanh \frac{gt}{v_\infty}}$$



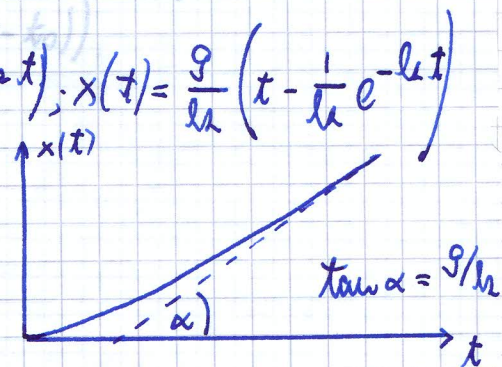
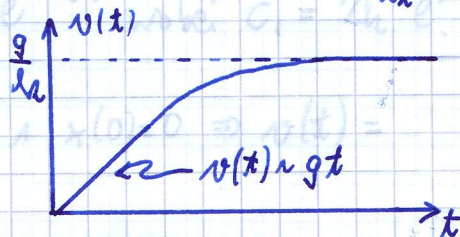
13.) Konstante Kraft und Flüssigkeitsreibung. Auf den Körper der Masse  $m$  wirken die Erdbeschleunigung und die Flüssigkeitsreibung  $= m\ddot{x} = mg - cx$

Bei einer Kugel mit Radius  $r$  und mit Viskosität  $\eta$  der Flüssigkeit:  $c = 6\pi r \eta$  (Stokes)

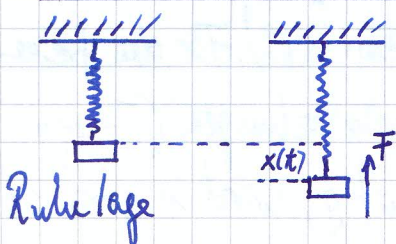
Mit  $h = c/m$ :  $\ddot{x} = g - h x \Rightarrow v(t) = g/h + c e^{-h t}$

AWP:  $v(0) = 0 \wedge x(0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{g}{h} (1 - e^{-h t}); \quad x(t) = \frac{g}{h} \left( t - \frac{1}{h} e^{-h t} \right)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{g}{h}$$



14.) Harmonische Schwingungen. Verschiebt man die Masse  $m$  eine Distanz  $x$  auf ihrer Ruhelage, so erfährt sie von der Schraubenfeder eine Kraft in Richtung Ruhelage. Für nicht zu grosse  $x$  ist diese Kraft über das Hooke'sche Gesetz gegeben:





$m\ddot{x} = -kx$   $\therefore k > 0$  ist die Federkonstante der Dimension  $\frac{dyu}{cm}$  oder  $\frac{N}{m}$ .

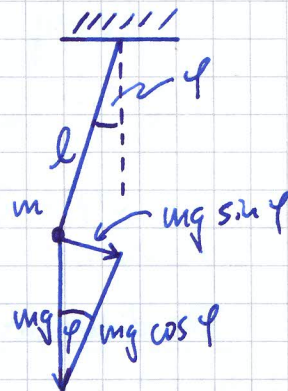
mit  $\omega^2 \equiv k/m$  haben wir  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  Oszillatorgleichung

Diese tritt sehr häufig in der Physik auf, denn für nicht zu grosse Auslenkungen aus einer Ruhelage ( $F(0) = 0$ ) gilt:  $F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \approx c_1 x$   
 $\uparrow = 0$  wg. Ruhelage

Bsp.: Mathematisches Pendel

$$m l \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \text{ und } \sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots$$

$$\text{Bei kleinen } \varphi \text{ gilt also } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$



Lösung der Schwingungsgleichung  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ :

(1.) Über Energiesatz: Potential  $V(x) = -\int_0^x F(x) dx = \frac{kx^2}{2} \leadsto E_{\text{ges}} = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{k}{2} x^2$

$$\leadsto \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} E_{\text{ges}} - \omega^2 x^2} \text{ oder } \int \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} E_{\text{ges}} - \omega^2 x^2}} = t + c$$

$$\omega x \equiv \sqrt{\frac{2}{m} E_{\text{ges}}} \sin u \leadsto \omega dx = \sqrt{\frac{2}{m} E_{\text{ges}}} \cos u du$$

$$\Rightarrow \omega(t+c) = \int \frac{\sqrt{\frac{2}{m} E_{\text{ges}}}}{\sqrt{\frac{2}{m} E_{\text{ges}}}} \frac{\cos u du}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} = \int du = u$$

$$\leadsto x(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{m} E_{\text{ges}}} \sin[\omega(t+c)] \text{ mit konstanten } E_{\text{ges}} \text{ und } c.$$

Mit trigonometrischen Formeln kann man die Lösung auch so schreiben:

$$\underline{x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t.} \quad \text{AWP: } x(0) = x_0 \leadsto A = v_0/\omega$$

$$v(0) = v_0 \quad B = x_0$$

(2.) Mit Exponentialansatz:  $x = e^{\lambda t} \leadsto \lambda^2 + \omega^2 = 0 \leadsto \lambda_{1/2} = \pm i\omega$

$$\text{allg. Lösung } x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

$$= (c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \sin \omega t \text{ muss reell sein:}$$

$$\left. \begin{array}{l} B = c_1 + c_2 \\ A = i(c_1 - c_2) \end{array} \right\} \text{reell } \leadsto \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2}(B - iA) \\ c_2 = \frac{1}{2}(B + iA) \end{array}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$



(3.) Reduzierung auf komplexe DGL 1. Ordnung:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ äquivalent zu System } \begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases}$$

Führe komplexe Variable ein  $u = x + iy \Rightarrow \dot{u} = \dot{x} + i\dot{y} = -\omega y + i\omega x = i\omega \underbrace{(x + iy)}_u$   
 $\Rightarrow \underline{\dot{u} = i\omega u}$

Lösung  $u(t) = \underset{c \in \mathbb{C}}{c} e^{i\omega t} = (c_1 + ic_2) e^{i\omega t}$

$$x(t) = \operatorname{Re}(u(t)) = c_1 \cos \omega t - c_2 \sin \omega t \equiv A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Dreidimensionales isotropes harmonischer Oszillator:

$$\vec{F} = -k\vec{r}; \quad \ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0 \quad \therefore \omega^2 = k/m.$$

Lösung:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t$

Bahnkurve: Ellipse. Anisotropes Fall: Lissajous-Figuren.

15.) Gedämpfte Schwingung: Tritt zusätzlich zur Rückstellkraft noch eine Flüssigkeitsdämpfung  $-\beta \dot{x}$  dazu, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) = -kx - \beta \dot{x} \quad \text{bzw. mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\kappa \equiv \frac{\beta}{m}: \quad \underline{\underline{\ddot{x} + 2\kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.}}$$

Ansatz  $e^{\lambda t}$ :  $\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$

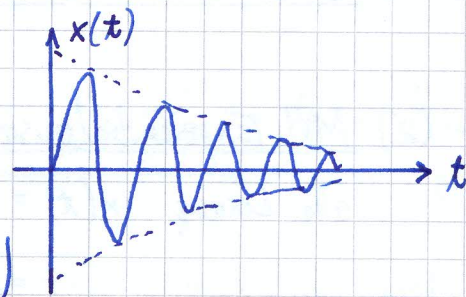
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

(1.)  $\kappa^2 < \omega_0^2$ : gedämpfte Schwingung

$$\lambda_{1/2} = -\kappa \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} = -\kappa \pm i\omega \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$$

$$x(t) = e^{-\kappa t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = a e^{-\kappa t} \sin(\omega t + \alpha)$$

Gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz  $\omega < \omega_0$



(2.)  $\kappa^2 > \omega_0^2$ : aperiodische Kriechbewegung:  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$   
 exponentielles Abklingen



(3.)  $\kappa^2 = \omega_0^2$ : aperiodischer Grenzfall: Doppelwurzel

aus Fall (1.) Asympt + Blos  $x(t) \sim A e^{-\kappa t} + B + \text{höhere Terme}$

$$\leadsto x(t) = e^{-\kappa t} (c_1 + c_2 t)$$

16.) Erzwungene Schwingung, Resonanz: Der Massenpunkt erfährt neben der Rückstellkraft noch eine äussere harmonische Störkraft als erregende Kraft:  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ .

Bewegungsgleichung:  $\ddot{x} + 2\kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$ :  $\omega_0^2 = \frac{g_0}{m}$ ;  $\kappa = \frac{B}{2m}$ ;  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ .

Bei  $f_0 \neq 0$  ist dies also eine inhomogene Gleichung bezugs  $x(t)$ .

Lösung:  $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Lösung des} \\ \text{homogenen Gl.} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{partikuläre Lösung} \\ \text{des inhomogenen Gl.} \end{array} \right\}$  ist allgemeinste

$$x_h(t) = a e^{-\kappa t} \sin(\omega_e t + \alpha) \quad \therefore \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad \text{Eigenkreisfrequenz}$$

Lösung, da zwei Integrationskonstanten gegeben.

Finden einer partikulären Lösung: Wir erraten den Ansatz  $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

Die Rechnung geht hier leichter, wenn wir die Bewegungsgl. erweitern durch  $i f_0 \sin \omega t$ ; am

Schluss betrachten wir dann nur die reelle Lösung:

$$\ddot{x} + 2\kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t} \quad \text{und Ansatz } x = A e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$\Rightarrow A (-\omega^2 + 2\kappa i\omega + \omega_0^2) e^{i(\omega t - \varphi)} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow A (\omega_0^2 - \omega^2 + 2\kappa i\omega) = f_0 e^{i\varphi} = f_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow A \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2 \omega^2} = f_0 \quad \text{aus Absolutbeträgen}$$

$$\begin{aligned} \text{N.B.: } |a+ib|^2 &= (a+ib)(a-ib) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\text{und } \tan \varphi = \frac{2\kappa\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{aus Quotienten des imag. \& reellen Anteils (Richtungstangenten)}$$

Realteil dieser Lösung ist  $x_p$ :  $x_p(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$

Allgemeine Lösung:  $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) + a e^{-\kappa t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} t + \alpha)$ ;  $a, \alpha$ : Integrationskonst.

Physikalische Bedeutung des Resultats: Zwei Anteile der Bewegung:

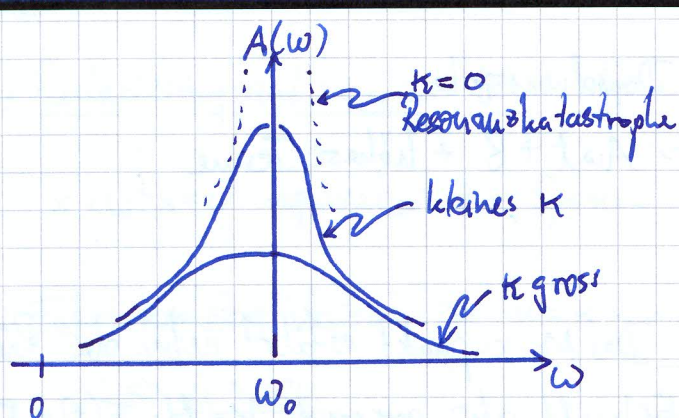
(a.) ungedämpfte harmonische Schwingung mit Erregerfrequenz  $\omega$

(b.) gedämpfte Schwingung mit Eigenfrequenz  $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$ ; verschwindet für  $t \gg \kappa^{-1}$

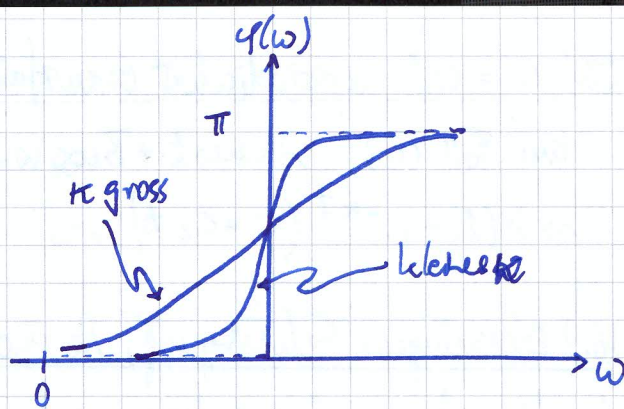
Beachte, dass auch die partikuläre Lösung die Systemparameter  $\omega_0$  und  $\kappa$  beinhaltet.

Nach dem "Einschwingvorgang" ist die stationäre Lösung eine ungedämpfte Schwingung  $x_p(t)$ .





Maximum der Resonanzkurve bei  $\sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2}$



$\varphi = \pi$ : Schwingung gegenphasig zur Erregung

$\varphi = 0$ : in Phase

Keine Dämpfung: Ansatz  $x_p(t) = A t \sin \omega t + B t \cos \omega t$

führt auf  $x_p(t) = \frac{1_0}{2\omega} t \sin \omega t$  Amplitude wächst mit  $t$  an.

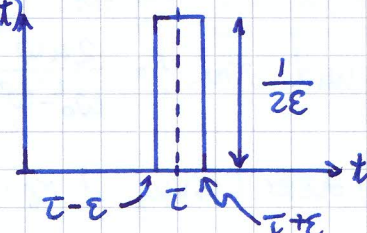
17.) Beliebige Erregerkraft, Greensche Funktion, Diracsche  $\delta$ -Funktion.

Erregerkraft  $f(t)$ :  $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ . Problem: finde die partikuläre Lösung. Die Lösung erfolgt durch die Methode der Greenschen Funktion. Grundidee: löse das Problem erst für eine nur kurzzeitig wirksame Kraft. Die allgemeine Lösung gewinnt man dann durch Überlagerung, aufgrund der Linearität der Gleichung.

Beschreibung einer stossartigen Kraft durch die Diracsche  $\delta$ -Funktion (Distribution):

Stossartig wirkende Kraft ("Hammeranschlag") bei  $t = \tau$ :

$$f(t) = \delta_\varepsilon(t - \tau)$$



Eigenschaft  $\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(t) dt = 1$

Diracsche  $\delta$ -Funktion ist definiert als Limes  $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \infty & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases}$

In physikalisch relevanten Formeln tritt die  $\delta$ -Funktion immer unter einem Integral auf.

Man versteht also  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_\varepsilon(t - \tau) dt$ .

Ist  $f(t)$  stetig:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_\varepsilon(t - \tau) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\tau + \theta\varepsilon) \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta_\varepsilon(t - \tau) dt}_{=1} = f(\tau)$



Wir haben also  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau)$ . Speziell  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt = 1$ .

Andere Darstellungen:  $\delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2}$ ;  $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi}$

Mathematisch korrekte Definition von Distributionen: Louis Schwartz Theorie der Distributionen

Die Testfunktion samt aller ihrer Ableitungen verschwindet genügend schnell auf dem Rand des Integrationsgebiets. Definiere dann das Integralprodukt

$$\langle \phi(x), T(x) \rangle = \int \phi(x) T(x) dx$$

↑ Testfkt.  
↑ Distribution

Bsp.: Was ist die Ableitung der Sprungfunktion  $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\langle \phi(x), \Theta'(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \Theta'(x) dx = \underbrace{[\phi(x) \Theta(x)]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ wg. Testfkt.}} - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \Theta(x) dx = - \int_0^{\infty} \frac{d\phi(x)}{dx} dx = \phi(0) - \phi(\infty)$$

$= \phi(0) \Rightarrow \Theta'(x) = \delta(x)$ .

Eigenschaften von  $\delta(x)$ :  $-\delta(-x) = \delta(x)$

$$-\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0$$

$$-f(x) \delta(x-x_0) = f(x_0) \delta(x-x_0)$$

$$-f(x) \delta'(x) = -f'(0) \delta(x) + f(0) \delta'(x)$$

$$-\frac{d}{dx} \operatorname{sign} x = 2\delta(x)$$

Greensche Funktion der Schwingungsgleichung:  $G(t, \tau)$  ist Lösung der Schwingungsgleichung für Einheitsstosskraft:  $\ddot{G} + 2\kappa \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t-\tau)$ .

Zur Zeit  $t < \tau$  sei das System in Ruhe:  $G(t, \tau) = 0 \quad \forall t < \tau$ .

Bestimmung von  $G(t, \tau)$ : Für  $t > \tau$  wirkt keine Kraft mehr, also muss  $(\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2})$ :

$$G(t, \tau) = e^{-\kappa(t-\tau)} (A \cos[\omega(t-\tau)] + B \sin[\omega(t-\tau)]).$$

A und B aus Sprungbedingung:  $\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \ddot{G} dt + 2\kappa \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \dot{G} dt + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \omega_0^2 G dt = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \delta(t-\tau) dt = 1$



$$\Rightarrow \underbrace{\dot{G}(\tau+\varepsilon, \tau) - \dot{G}(\tau-\varepsilon, \tau)}_{=0} + 2\kappa \left( \underbrace{G(\tau+\varepsilon, \tau) - G(\tau-\varepsilon, \tau)}_{=0} \right) + \omega_0^2 \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} G(x, \tau) dx}_{I} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } |G(\tau+\varepsilon, \tau)| &\leq \max |G| \cdot 2\varepsilon \quad \text{falls nur } |G| \text{ endlich} \\ |I| &\leq \max |G| \cdot 2\varepsilon \quad \text{falls nur } |G| \text{ endlich} \end{aligned}$$

Bei  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwinden diese Terme und wir erhalten:

$G(\tau+0, \tau) = 0$  Unmittelbar nach dem "Hammerschlag" ändert sich der

$\dot{G}(\tau+0, \tau) = 1$  Ort des Massenpunktes nicht, es erhält aber den Einheitsimpuls (mit der Wahl  $m=1$  also die Einheitsgeschwindigkeit).

$$\Rightarrow G(\tau+0, \tau) = A = 0 \wedge \dot{G}(\tau+0, \tau) = -\kappa A + \omega B = 1 \Rightarrow B = 1/\omega$$

$$\Rightarrow G(x, \tau) = \frac{1}{\omega} e^{-\kappa(x-\tau)} \sin \omega t \quad t > \tau \quad \wedge \quad G(x, \tau) = 0 \quad t < \tau$$

Wir können dieses Ergebnis schreiben als  $G(x, \tau) = \Theta(t-\tau) \frac{1}{\omega} e^{-\kappa(t-\tau)} \sin(\omega[t-\tau])$ .

Beliebige Störkraft: Multipliziere  $\ddot{G} + 2\kappa \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t-\tau)$  mit  $f(t)$  und integriere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, \tau) d\tau + 2\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \tau) d\tau + \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) G(x, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int f(\tau) G d\tau + 2\kappa \frac{\partial}{\partial t} \int f(\tau) G d\tau + \omega_0^2 \int f(\tau) G d\tau = f(t)$$

Mit  $x_p(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) G(t, \tau) d\tau$  folgt wegen  $G(t, \tau) \neq 0 \quad t < \tau$

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\omega} e^{-\kappa(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] f(\tau) d\tau \quad \text{nur vergangene Werte von}$$

$f(\tau)$  tragen bei.  $x_p(t)$  ist die Antwort / Response des Systems.

Durch Einsetzen von  $f(t) = f_0 \cos \omega t$  von vorher.

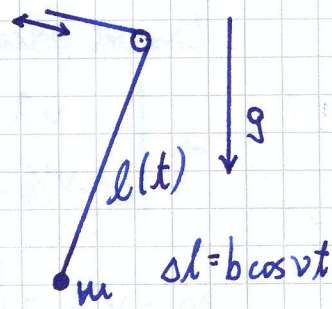
Ohne Dämpfung und für den exakten Resonanzfall erhält man  $f(t) = 0, t < 0$

und  $f(t) = f_0 \cos \omega_0 t, t > 0 \Rightarrow$  nach Rechnung folgt  $x_p(t) = f_0 \frac{t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$  wie vorher.



18.) Schwingungsgleichung mit zeitabhängiger Frequenz. Bei manchen Problemen tritt eine explizite Zeitabhängigkeit nicht als Erregerkraft, sondern in Form einer sich zeitlich ändernden Frequenz auf:  $\ddot{x} + \phi(t)x = 0$   $\therefore \phi(t)$  periodisch ist einfachstes Fall.

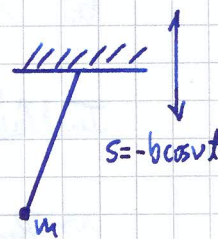
Bsp.: mathematisches Pendel mit periodisch variiertes Pendellänge oder Aufhängepunkt (Effekt ähnlich Kinderschaukel)



Pendelgleichung in linearisierter Form:  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$

Sich ändernde Fadenlänge:  $\phi(t) = \frac{g}{l_0 + \Delta l(t)} \approx \frac{g}{l_0} \left(1 - \frac{\Delta l(t)}{l_0}\right) = \frac{g}{l_0} - \frac{g b}{l_0^2} \cos vt$

Sich ändernder Aufhängepunkt:  $s = -b \cos vt \Rightarrow g(t) = g - a_{\text{trans}} = g - \ddot{s} = g - bv^2 \cos vt$



$\Rightarrow \phi(t) = \frac{g - bv^2 \cos vt}{l_0} = \frac{g}{l_0} - \frac{bv^2}{l_0} \cos vt$

$\Rightarrow$  Gleichung der Form:  $\ddot{x} + \omega^2(1 - h \cos vt)x = 0$  (\*) Mathieusche Dgl.

Normalform:  $\frac{d^2x}{d\tau^2} + [\Omega^2 - 2q \cos 2\tau]x = 0$ ;  $v\tau = 2\tau$ ;  $\Omega = 2\omega^2/v^2$ ;  $q = 2\omega^2 h/v^2$

In diesem System wird ein Systemparameter geändert: "parametrische Oszillation"

Effekte:  $v \approx 2\omega$  parametrische Resonanz; dynamische Stabilisierung

(a.) Parametrische Resonanz: Wir schreiben  $x(t) = z(t)e^{ivt/2} + \underbrace{z^*(t)e^{-ivt/2}}_{\text{c.c.}}$

Wir würden erwarten, dass sich bei  $\omega \approx v/2$   $x(t)$  ungefähr mit der Frequenz  $\omega$ ,  $z(t)$  also nur sehr langsam ändert. Das wird sich selbstkonsistent für  $|h| \ll 1$  ergeben.

$\Rightarrow \ddot{x} = \underbrace{\ddot{z}}_{\approx 0} + iv\dot{z} - \frac{v^2}{4}z \Big] e^{ivt/2} + \text{c.c.}$

Einsetzen in (\*)  $[iv\dot{z} + (\omega^2 - \frac{v^2}{4})z] e^{ivt/2} + [-iv\dot{z}^* + (\omega^2 - \frac{v^2}{4})z^*] e^{-ivt/2} - \omega^2 h \frac{e^{ivt} - e^{-ivt}}{2} (ze^{ivt/2} + \text{c.c.}) = 0$

Oder  $[iv\dot{z} + (\omega^2 - \frac{v^2}{4})z - \frac{\omega^2 h}{2}z^*] e^{ivt/2} + [-iv\dot{z}^* + (\omega^2 - \frac{v^2}{4})z^* - \frac{\omega^2 h}{2}z] e^{-ivt/2} = 0$

$-\frac{\omega^2 h}{2} (e^{i3vt/2} z + e^{-i3vt/2} z^*) = 0$  wird vernachlässigt



$\Rightarrow iv\dot{z} + (\omega^2 - \frac{v^2}{4})z - \frac{\omega^2 h}{2} z^* = 0$  und c.c. Grl. mit identischer Aussage.

Aufspaltung in Re und Im:  $z \equiv u + iv$

$$\leadsto v\dot{u} + (\omega^2 - \frac{v^2}{4})u + \frac{\omega^2 h}{2}v = 0 \quad \wedge \quad -v\dot{v} + (\omega^2 - \frac{v^2}{4})v - \frac{\omega^2 h}{2}u = 0$$

Lineares gekoppeltes Gleichungssystem. Lösung durch Ansatz:  $u = Ae^{\lambda t}$ ;  $v = Be^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} v\lambda & \omega^2 - v^2/4 + \omega^2 h/2 \\ \omega^2 - v^2/4 - \omega^2 h/2 & -v\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\leadsto -v^2\lambda^2 - \left[ (\omega^2 - v^2/4)^2 - \frac{\omega^4 h^2}{4} \right] = 0 \quad \leadsto \quad \lambda^2 = \frac{\omega^4 h^2}{4v^2} - \frac{1}{v^2} (\omega^2 - v^2/4)^2$$

Es kann keine Aufschaukelung auftreten, wenn  $\lambda^2 < 0$ , also  $\lambda$  rein imaginär. Nur bei  $\lambda^2 = \lambda_0^2 > 0$  tritt Aufschaukelung ein, d.h. bei  $\frac{\omega^2 h}{2v} > \frac{1}{v} |\omega^2 - v^2/4|$

In Näherung  $\omega \approx v/2$ :  $\omega^2 - v^2/4 = (\omega - v/2)(\omega + v/2) \approx v(\omega - v/2)$

$\leadsto$  Bedingung wird zu  $\frac{\omega h}{4} > |\omega - v/2|$  oder  $\underline{2\omega(1 - h/4) < v < 2\omega(1 + h/4)}$

Wie man sieht, ist Aufschaukelung möglich für kleine  $h$ -Werte, und dort  $\omega \approx v/2$ .

Maximaler Zuwachs bei  $v = 2\omega$ :  $\lambda_0 = \frac{\omega^2 h}{2v} = \frac{\omega h}{4} \leadsto x(t) \stackrel{!}{=} A_0 e^{(h/4)\omega t} \cos \omega t$

Zuwachs pro Periode:  $e^{h/4} = e^{b/4\lambda_0} \approx 1 + b/4\lambda_0$ .

Bei Dämpfung kann man zeigen: Aufschaukelung, falls  $e^{h\omega t/4}$  muss grösser sein als Dämpfung  $e^{-\kappa t}$ :  $h > 4\kappa/\omega$ .

(b.) Dynamische Stabilisierung des umgekehrten Pendels: Durch genaue Analyse des Mathieuschen DGL mithilfe des Floquet'schen Theorems kann man zeigen, dass man kein Pendel eine Stabilisierung des oberen Umkehrpunktes erreichen kann.



19.) Nichtlineare Schwingungen (anharmonische Schwingungen) treten auf, wenn in der Entwicklung der Kraft nach der Auslenkung höhere Terme relevant werden, z. Bsp.

$$F(x) = -kx + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \dots$$

Beim Fadenpendel gilt speziell  $F(\varphi) = -\frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{g}{l} (\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots)$ .

Die Nichtlinearität tritt also bei größeren Auslenkungen auf. Die Bewegungsgleichung wird nichtlinear, und die üblichen mathematischen Verfahren versagen. Ohne Dämpfung kann man den Energiesatz anwenden. Beim Fadenpendel führt die weitere Integration dann auf elliptische Integrale.

Für nicht allzu grosse Nichtlinearitäten kann man Störungsverfahren anwenden. Beim Fadenpendel nimmt in erster Näherung die Frequenz mit der Amplitude  $a$  ab:

$$\omega(a) = \omega(a=0) (1 - a^2/16) \quad \text{s.z. Bsp. Bogoljubov \& Mitropolski "Asymptotische Methoden"}$$

Besonders wichtig sind nichtlineare Gleichungen bei selbstregten Schwingungen.

Bsp.: van der Pol Oszillator:  $\ddot{x} - 2\alpha_0 (1 - (x/a)^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

negative Dämpfung  $\rightarrow$  Verstärkung nimmt mit wachsender Amplitude ab.

Lösung für kleine Verstärkung  $\alpha_0 \ll \omega_0$ : Ansatz  $x(t) = u(t) e^{i\omega_0 t} + c.c.$

$$\rightarrow \dot{x} = (i + i\omega_0 u) e^{i\omega_0 t} + c.c. ; \ddot{x} = (\ddot{u} + 2i\omega_0 \dot{u} - \omega_0^2 u) e^{i\omega_0 t} + c.c.$$

Wir vernachlässigen beim Einsetzen Terme mit  $\ddot{u}$ ,  $\alpha_0 \dot{u}$  und  $e^{\pm 3i\omega_0 t}$  ( $u(t)$  langsam veränderl.)

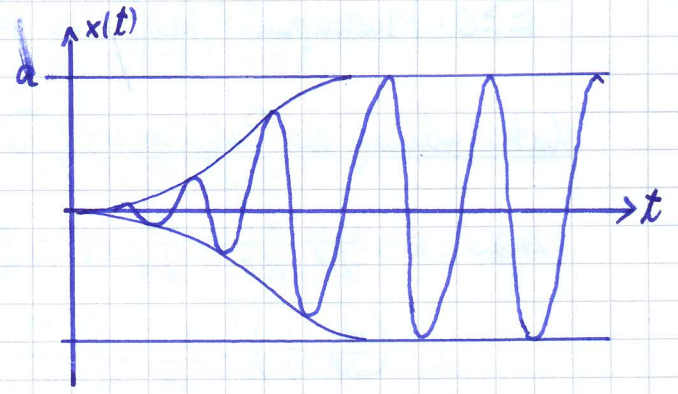
$$\Rightarrow (2i\omega_0 \dot{u} - 2\alpha_0 i\omega_0 u) e^{i\omega_0 t} + (-2i\omega_0 \dot{u}^* + 2\alpha_0 i\omega_0 \dot{u}^*) e^{-i\omega_0 t} + \frac{2\alpha_0}{a^2} (u^2 e^{2i\omega_0 t} + 2uu^* + (u^*)^2 e^{-2i\omega_0 t}) \cdot (i\omega_0 u e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 u^* e^{-i\omega_0 t}) = 0$$

Koeff. des Terms  $e^{\pm i\omega_0 t}$  müssen verschwinden:  $\dot{u} = \alpha_0 (1 - \frac{uu^*}{a^2}) u$  und  $u(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \wedge \dot{r} = \alpha_0 (1 - \frac{r^2}{a^2}) r$$

Lösung:  $u(t) = u(0) \frac{e^{\alpha_0 t}}{\sqrt{1 + \frac{u(0)^2}{a^2} (e^{2\alpha_0 t} - 1)}}$

$$u(\infty) = \frac{u(0)}{|u(0)|} a \quad \text{Plateau}$$





## 20.) Bewegung im Gravitationsfeld (Planetenbewegung)

Wir betrachten eine Masse  $m$  im Anziehungsbereich einer Masse  $M$ , die im Punkte sei (also  $M \gg m$ ). Dies gilt insbesondere bei der Planetenbewegung:  $M_{\text{Sonne}} \approx 330.000 M_{\text{Erde}}$ .

Bewegungsgleichung:  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \therefore r = |\vec{r}|$

Zentralkraft  $\Rightarrow \vec{N} = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}} = \text{const.}$  Drehimpulserhaltung  $\sim \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}$

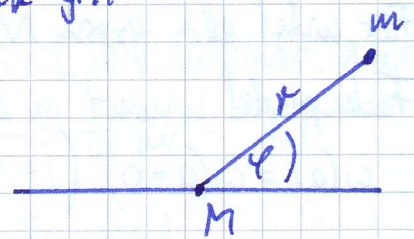
Das bedeutet: (I) Die Bewegung erfolgt stets in einer Ebene

(II) Die Flächengeschwindigkeit ist konstant

$\vec{F}(\vec{r})$  konservativ  $\Rightarrow V(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}$ , so dass Energiesatz gilt:

(III)  $\frac{1}{2} m \dot{\vec{v}}^2 + V(r) = E_{\text{Ges}} = \text{const.}$

Es ist zweckmässig, ebene Polarkoordinaten einzuführen:



Da (II) gilt, muss also  $\dot{\varphi} = \frac{1}{2} |\vec{c}| = \text{const.}$

$\Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = h = 2 \frac{dA}{dt} = \text{const.}$  (vgl. S.6)

Geschwindigkeit in Polarkoordinaten:  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \sim \vec{v}^2 = \dot{r}^2 + 2r \dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi}_{=0} + r^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}_{=1}$

$\Rightarrow \vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$

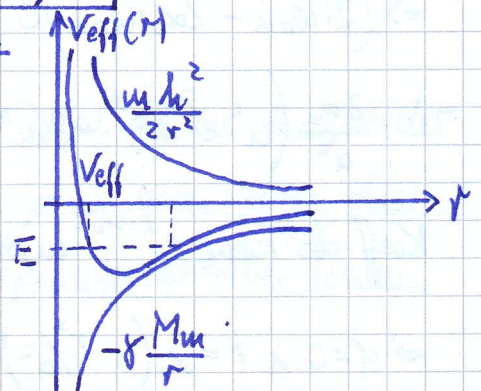
$\Rightarrow$  Energiesatz lautet somit:  $\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \gamma \frac{Mm}{r} = E_{\text{Ges}}$ .

Da  $\dot{\varphi} = h/r^2 \Rightarrow$

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2\gamma M}{r} = \frac{2E}{m} \quad (A)$$

$$\dot{\varphi} = h/r^2 \quad (B)$$

Betrachte wir das effektive Potential  $V_{\text{eff}}(r) = \frac{m}{2} \frac{h^2}{r^2} - \gamma \frac{Mm}{r}$



Der Energiesatz ist dann  $\frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E$

$\Rightarrow E < 0$ : Massepunkt pendelt zwischen  $r_{\text{min}}$  und  $r_{\text{max}}$

$E \geq 0$ : Massepunkt läuft ins Unendliche

Untersuchung der Bahnkurve: Berechne  $r(\varphi)$ .

Wegen  $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{h}{r^2} = -h \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}$  folgt mit (A)

$$h^2 \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2\gamma M}{r} = \frac{2E}{m}$$



$$\text{oder } \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{h^2} \right) \right]^2 + \left( \frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{h^2} \right)^2 = \frac{2E}{mh^2} + \frac{(\gamma M)^2}{h^4}$$

Ergänzung mit 0  $\nearrow$  Quadrat. Ergänzung

Energiesatz des harmon. Oszillators:  $\dot{x}^2 + x^2 = 2E'$  ( $m = \omega^2 = 1$ )

$$\Rightarrow \text{Lösung: } x(t) = \sqrt{2E'} \cos(t + \alpha) \wedge \dot{x}(t) = -\sqrt{2E'} \sin(t + \alpha)$$

$$\text{Durch Vergleich erhalten wir } \frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{h^2} = \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{(\gamma M)^2}{h^4}}}_{\frac{E}{p}} \cos(\varphi + \alpha)$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{p}{1 + E \cos(\varphi + \alpha)} \quad \therefore p = \frac{h^2}{\gamma M} \wedge E = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{m\gamma^2 M^2}}$$

$$\text{Ist } E < 0 \leadsto E < 1 \leadsto r \text{ variiert zwischen } \frac{p}{1+E} = r_{\min} \leq r \leq r_{\max} = \frac{p}{1-E}$$

Koordinatensystem sei nun so gelegt, dass bei  $r = r_{\max}$  der Winkel  $\varphi = 0 \Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow$

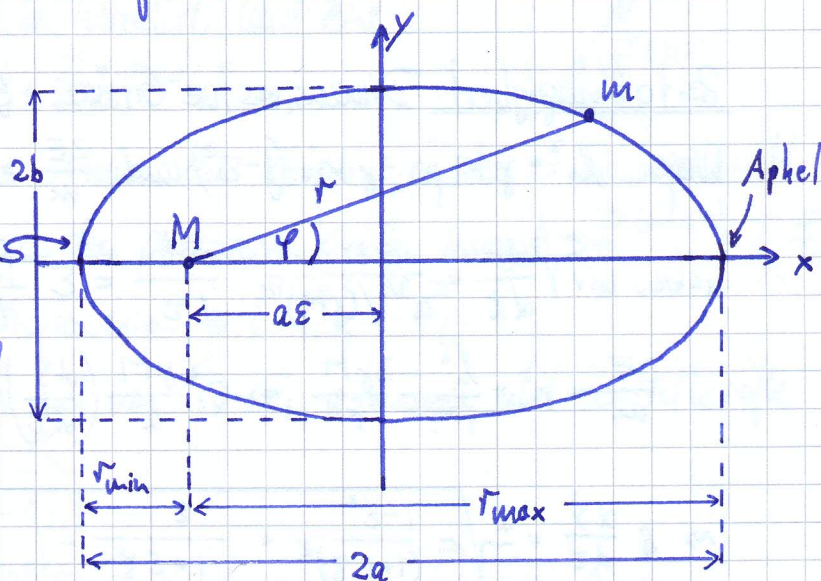
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - E \cos \varphi} \quad \text{Gleichung eines Kegelschnitts mit Exzentrizität } E:$$

$E < 1$     $E < 0$    Ellipse

$E = 1$     $E = 0$    Parabel

$E > 1$     $E > 0$    Hyperbel

Perihel  $\leftarrow$



In folgendem betrachten wir den Fall der Planetenbewegung  $E < 1$ ,  $E < 0$

$$r_{\min} \equiv a(1-E) \wedge r_{\max} \equiv a(1+E)$$

$$\text{Mit dieser Konvention: } r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1+E} + \frac{p}{1-E} = \frac{2p}{1-E^2} = 2a$$

$$\Rightarrow p = a(1-E^2) \text{ und } a - r_{\min} = a - \frac{p}{1+E} = a - a(1-E) = aE.$$

Zu zeigen:  $r(\varphi) = p + \varepsilon r \cos \varphi$  ist wirklich eine Elliptengleichung:

$$r \cos \varphi = aE + x; \quad r = \sqrt{y^2 + (aE + x)^2} \Rightarrow p + \varepsilon r \cos \varphi = a(1-E^2) + aE^2 + \varepsilon x = a + \varepsilon x$$

$$\text{mit } r^2 = (p + \varepsilon r \cos \varphi)^2 = (a + \varepsilon x)^2 = y^2 + (aE + x)^2 \text{ folgt dann}$$



$$y^2 + a^2 \varepsilon^2 + 2a \varepsilon x + x^2 = a^2 + 2a \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 \Rightarrow x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \text{Ellipsengleichung}$$

→ 1. Keplergesetz: Die Bahnen der Planeten des Sonnensystems sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Berechnung der Umlaufzeit: Aus  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = h/2$  gilt bei einem Umlauf  $\oint(T) - \oint(0) = \frac{h}{2} T$ .  $\oint(T) - \oint(0)$  ist die Fläche bei einem Umlauf, also gerade die Ellipsenfläche, d.h.  $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{h} a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{2\pi}{h} a^{3/2} \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)} = \frac{2\pi \sqrt{p}}{h} a^{3/2}$$

mit  $p = \frac{h^2}{\gamma M}$  und  $\frac{\sqrt{p}}{h} = \frac{1}{\sqrt{\gamma M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a^{3/2} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}}$

3. Keplergesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.

Zeitabhängigkeit: Dimensionslose Grössen  $\xi = \frac{r-a}{a\varepsilon}$  und  $\tau = \frac{\sqrt{\gamma M}}{a^{3/2}} t$

Wegen  $h^2 = \gamma M p = \gamma M a (1 - \varepsilon^2)$  und  $\frac{2E}{m} = (\varepsilon^2 - 1) \frac{\gamma^2 M^2}{h^2} = (\varepsilon^2 - 1) \gamma^2 M^2 / [\gamma M a (1 - \varepsilon^2)] = -\frac{\gamma M}{a}$

haben wir  $\frac{dr}{dt} = \frac{a\varepsilon}{a^{3/2}(\gamma M)^{1/2}} \frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon \frac{\sqrt{\gamma M}}{a} \frac{d\xi}{d\tau}$  der Energiesatz, Gl. (A):

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2\gamma M}{r} \Rightarrow \varepsilon^2 \frac{\gamma M}{a} \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \frac{\gamma M a (1 - \varepsilon^2)}{a^2 (1 + \varepsilon \xi)^2} - \frac{2\gamma M}{a(1 + \varepsilon \xi)} = -\frac{\gamma M}{a}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \frac{d\xi}{d\tau} = \pm \sqrt{-\frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon \xi)^2} + \frac{2}{1 + \varepsilon \xi} - 1} = \frac{\pm 1}{1 + \varepsilon \xi} \sqrt{-(1 - \varepsilon^2) + 2(1 + \varepsilon \xi) - (1 + \varepsilon \xi)^2} = \frac{\pm 1}{1 + \varepsilon \xi} \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \xi^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d\xi}{d\tau} = \pm \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{1 + \varepsilon \xi}}}$$

Mit Substitution  $\xi = \cos u$   $\wedge d\xi = -\sin u du \Rightarrow \frac{\sin u du}{d\tau} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 u}}{1 + \varepsilon \cos u} = \frac{\sin u}{1 + \varepsilon \cos u}$

O.B.d.A. sollen  $u$  und  $\tau$  dieselbe Richtung haben  $\Rightarrow d\tau = (1 + \varepsilon \cos u) du$

$$\Rightarrow \tau - \tau_0 = u + \varepsilon \sin u = \arccos \xi \pm \varepsilon \sqrt{1 - \xi^2}$$



$$\Rightarrow t - t_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \left( \arccos \frac{r-a}{a\varepsilon} \pm \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{r-a}{a\varepsilon}\right)^2} \right)$$

Definiert  $t = t(r)$  und damit  $r = r(t)$ . Die Umkehrfunktion kann aber nicht analytisch gebildet werden.

Eine Umlaufzeit  $T$  führt zu gleichen Wert für  $r$ , das  $\arccos$  ist um  $2\pi$  gewachsen  
 $\Rightarrow$  voriges Resultat  $T = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{GM}$ .

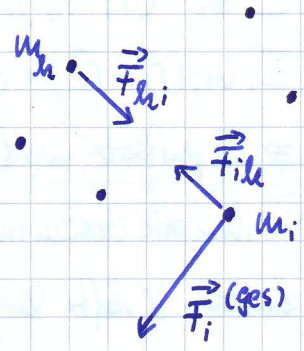
Durch Einsetzen von  $r = r(\varphi)$  in  $t = t(r)$ , so erhält man eine entsprechende Gleichung für  $t = t(\varphi)$ .

## II. Mechanik der Punktsysteme; Prinzipien der Mechanik.

### 1.) Das Punktsystem und die darauf wirkenden Kräfte

Endliche Anzahl von Massenpunkten. In Inertialsystem lauten die Bewegungsgleichungen:  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(ges)}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$

Punktsysteme: spalte die Kraft auf in eine äussere Kraft, die nicht von den anderen Massenpunkten herrührt, und eine innere Kraft:  $\vec{F}_i^{(ges)} = \vec{F}_i^{(äusser)} + \vec{F}_i^{(inner)}$



Bsp.: Innere Kräfte = Kräfte zw. den Atomen des Körpers; äussere = Schwerkraft.

Hierbei setzt sich die innere Kraft aus den paarweisen Kräften zusammen:  $\vec{F}_i^{(inner)} = \sum_n \vec{F}_{in}$

und es gilt  $\vec{F}_{ii} = 0$ . Aus dem 3. Newtonaxiom gilt  $\vec{F}_{in} = -\vec{F}_{ni}$

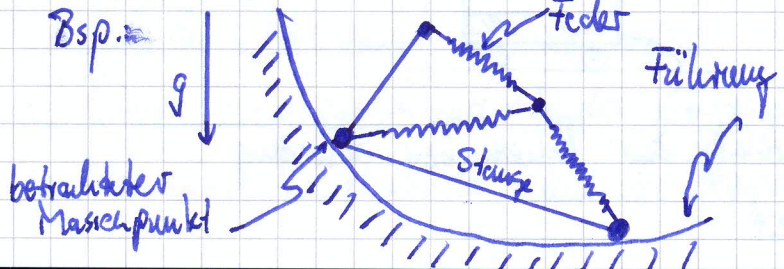
Wir betrachten Systeme, wo die Kräfte nur von  $\vec{r}_i - \vec{r}_n$  abhängen und Zentralkräfte sind:

$$\vec{F}_{in} = A_{in}(\vec{r}_i - \vec{r}_n) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|}$$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichungen: } m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(äusser)}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \sum_{n=1}^n \vec{F}_{in}(\vec{r}_i - \vec{r}_n)$$

I. allg. 3n gekoppelte DGLn 2. Ordnung.

Freie und gebundene Systeme: Auf ein freies System wirken keine zusätzlichen Zwangskräfte. In gebundenen System bestehen zwischen  $\vec{r}_i$  und  $\vec{r}_n$  Bedingungen.



- $\vec{F}^{(e,ä)}$  Schwerkraft: äussere eingeprägte Kraft
- $\vec{F}^{(ä)}$  Äussere Führung: äussere Zwangskraft
- $\vec{F}^{(i)}$  Starre Stauze: innere Zwangskraft
- $\vec{F}^{(e,i)}$  Federn: innere eingeprägte Kraft