Rotierender Starrer Körper/Kreisel

Ralf Metzler, Uni Potsdam, 2017-07-05

Kinetische Energie des Starren Körpers

Translationsenergie:

$$T_{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2}\vec{v}_0^2 \sum_\alpha m_\alpha = \frac{m}{2}\vec{v}_0^2, \text{ wobei } m = \sum_\alpha m_\alpha \text{ die Gesamtmasse}$$

Wechselseitige Energie:

$$T_{\mathrm{w}} = \vec{v}_0 \left(\vec{\omega} \times \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \right) = m\vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_S \right),$$

$\therefore$ Schwerpunktskoordinate $\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$ des Bezugspunkts S

Rotationsenergie:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \right)^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(x'_{\alpha k} x'_{\alpha k} \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} \right) \omega'_i \omega'_j \\ &= \Theta'_{ij}\omega'_i\omega'_j = \Theta_{ij}\omega_i\omega_j \end{aligned}$$

S als Bezugspunkt: $T_{\mathrm{w}} = 0$. Ein festgehaltener Punkt: $\vec{v}_0 = 0 \curvearrowright T_{\mathrm{trans}} = T_{\mathrm{w}} = 0$

Drehimpuls und Drehmoment

Auf den Schwerpunkt bezogen:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{N} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha \\ \vec{M} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{N}} = \vec{M}$$

System I: Inertialsystem; System II: mitbewegt aber nicht mitrotiert; System III: körperfest

Indexschreibweise im System II:

$$N_i = \sum_\alpha m_\alpha \Big(x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \Big) \omega_j \equiv \Theta_{ij} \omega_j = \frac{\partial T_{\mathrm{rot}}}{\partial \omega_i}$$

Indexschreibweise im System III ($\omega'_j = \omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$):

$$N'_i = \sum_\alpha m_\alpha \Big(x'_{\alpha k} x'_{\alpha k} \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} \Big) \omega'_j \equiv \Theta'_{ij} \omega'_j = \frac{\partial T_{\mathrm{rot}}}{\partial \omega'_i}$$

In System III ist Θ_{ij} eine Konstante, in System II i.allg. eine Funktion der Zeit $\Longrightarrow$ Umschreiben des Drehimpulssatzes $M_i = \dot{N}_i = \frac{d}{dt}(\Theta_{ij}\omega_j)$ auf System III

Levi-Civita Symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } i, j, k \text{ gerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ -1, & \text{falls } i, j, k \text{ ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich} \end{cases}$$

Darstellung durch Kronecker-δ:

$$\varepsilon_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{bmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 \\ \varepsilon_{231} a_3 b_1 + \varepsilon_{213} a_1 b_3 \\ \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Ferner gilt:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 3! = 6$$

Eulersche Kreiselgleichungen

Im allgemeinen System III:

$$M'_i = \Theta'_{ij}\dot{\omega}'_j + \varepsilon_{ijk}\Theta'_{kl}\omega'_j\omega'_l$$

Im Hauptachsensystem (Θ_{ij} diagonal):

$$\boxed{\begin{aligned} M'_1 &= \Theta_1\dot{\omega}'_1 + \Big(\Theta_3 - \Theta_2\Big)\omega'_2\omega'_3 \\ M'_2 &= \Theta_2\dot{\omega}'_2 + \Big(\Theta_1 - \Theta_3\Big)\omega'_3\omega'_1 \\ M'_3 &= \Theta_3\dot{\omega}'_3 + \Big(\Theta_2 - \Theta_1\Big)\omega'_1\omega'_2 \end{aligned}}$$

Spezialfälle der Eulerschen Kreiselgleichungen

(1.) Isotroper Trägheitstensor $\Theta_{ij} = \Theta\delta_{ij} = \Theta'_{ij}$:

$$M_i = \frac{d}{dt}\Big(\Theta\delta_{ij}\omega_j\Big) = \Theta\frac{d\omega_i}{dt} \quad\Rightarrow\quad \vec{M} = \Theta\dot{\vec{\omega}}$$

Im kräftefreien Fall ändert sich die Drehachse nicht, sonst $d\vec{\omega} = \vec{M}\,dt/\Theta$.

(2.) Allgemeiner kräftefreier Fall:

$$\begin{aligned}
\Theta_1\dot{\omega}'_1 + \Big(\Theta_3 - \Theta_2\Big)\omega'_2\omega'_3 &= 0 \\
\Theta_2\dot{\omega}'_2 + \Big(\Theta_1 - \Theta_3\Big)\omega'_3\omega'_1 &= 0 \qquad (*) \\
\Theta_3\dot{\omega}'_3 + \Big(\Theta_2 - \Theta_1\Big)\omega'_1\omega'_2 &= 0
\end{aligned}$$

Betrachte Rotation um Hauptträgheitsachsen. Annahme: Rotation mit $\omega'_1 = \text{const.} \wedge \omega'_2 = \omega'_3 = 0$. Diese Bewegung erfüllt sicher die Kreiselgleichungen $(*)$. Frage: Sind solche Bewegungen stabil?

Betrachte kleine Abweichungen $\Delta\omega_i$ um die stationären Werte $\omega_1' = \text{const.} \wedge \omega_2' = \omega_3' = 0$. Es folgt dann für die Terme 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 \Delta\dot{\omega}_1' &= 0 \\
\Theta_2 \Delta\dot{\omega}_2' + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1' \Delta\omega_3' &= 0 \\
\Theta_3 \Delta\dot{\omega}_3' + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1' \Delta\omega_2' &= 0
\end{aligned}$$

Aus 3. Gleichung:

$$\Delta\dot{\omega}_3' = -\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3}\omega_1' \Delta\omega_2'$$

Mit zeitlicher Ableitung der 2. Gleichung:

$$\Delta\ddot{\omega}_2' = \frac{\omega_1'^2}{\Theta_2\Theta_3}\Delta\omega_2'(\Theta_2 - \Theta_1)(\Theta_1 - \Theta_3)$$

Bewegung stabil, falls $\Delta\ddot{\omega}_2' \propto -\Delta\omega_2' \Rightarrow$ Stabil, falls

$$(\Theta_1 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3) > 0$$

Die Bewegung ist also stabil, falls Θ_1 das größte oder kleinste Trägheitsmoment ist.

(3.) Freie Rotation um allgemeine Achse:

Sei x_1' die Rotationsachse. Für $\vec{\omega} = (\omega_1', 0, 0)$ liefern der Energiesatz

$$T = \frac{1}{2}\Theta_{ij}'\omega_i'\omega_j' \;\;\Rightarrow\;\; T = \frac{1}{2}\Theta_{11}'\omega_1'^2 \;\;\Rightarrow\;\; \dot{\omega}_1' = 0$$

und damit die Kreiselgleichungen

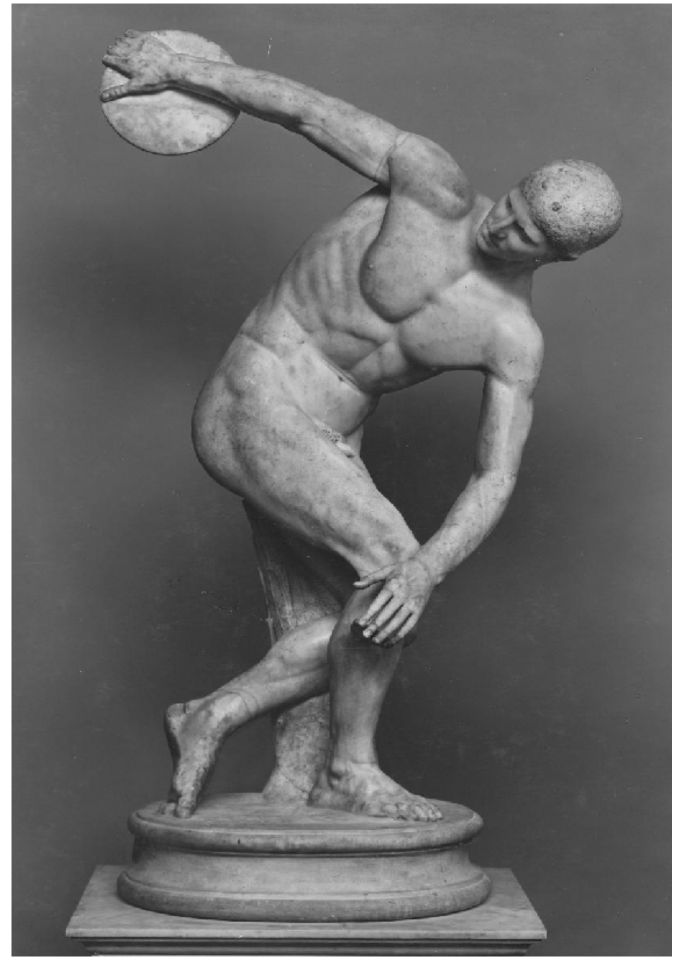
$$\Theta_{ij}'\dot{\omega}_j' + \varepsilon_{ijk}\Theta_{kl}'\omega_j'\omega_l' = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \varepsilon_{i1k}\Theta_{k1}' = 0$$

Diese Bedingung kann nur befriedigt werden, falls die Deviationsmomente $\Theta_{21}' = \Theta_{31}' = 0$ verschwinden $\Longrightarrow$ freie Rotation nur möglich, wenn die Drehachse mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt

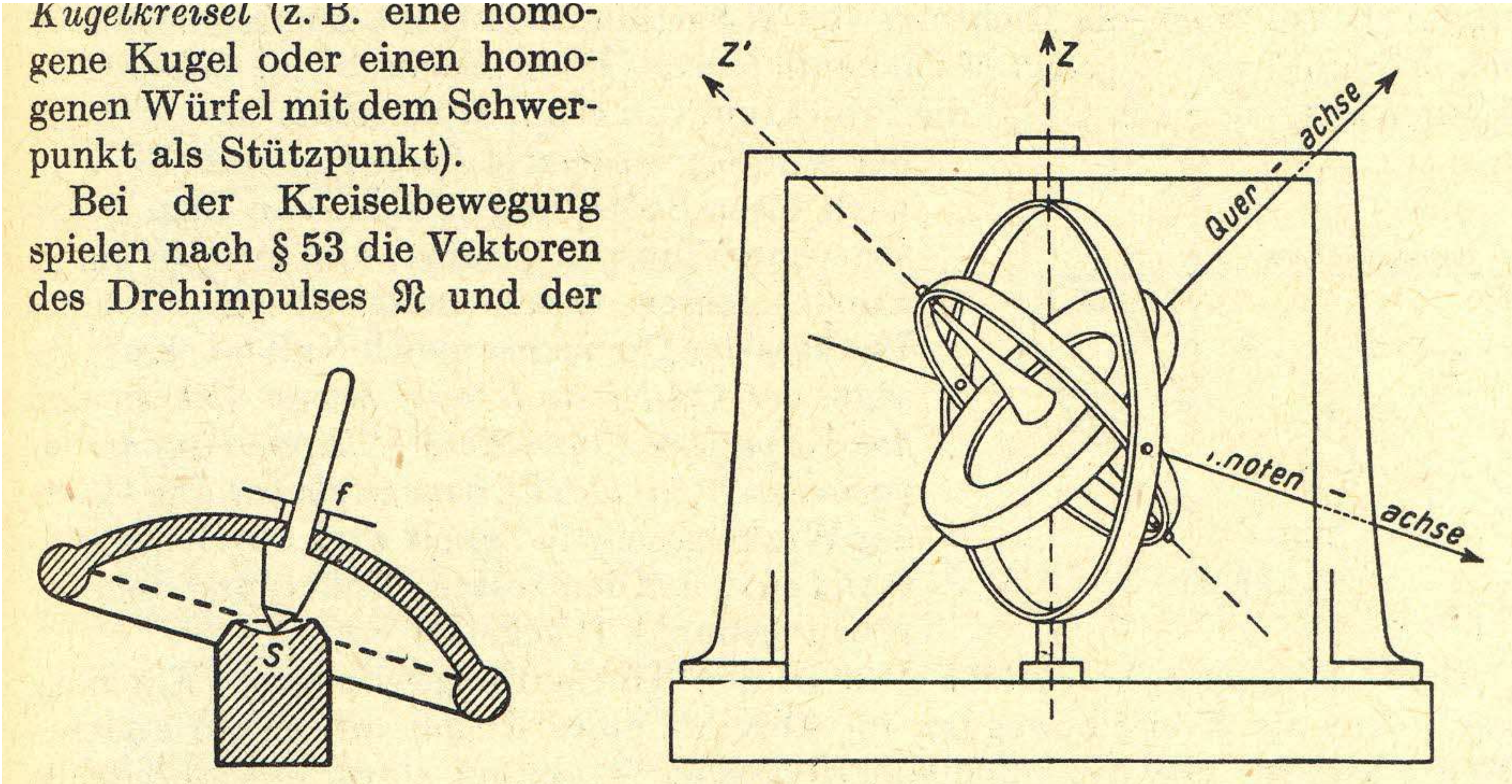
Bem.: Unfreie Rotation um eine Achse ist immer möglich. Dann übt der rotierende Körper Zwangsmomente auf die Lagerung aus. Deshalb sollte man z.Bsp. Autoreifen auswuchten.

Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, dessen Bewegung um einen Punkt getrennt von der Bewegung dieses Punktes betrachtet werden kann, z.Bsp. ein “gewöhnlicher Kreisel” oder ein geschleuderter Diskus:



Kräftefreier Kreisel


Kugelkreisel (z. B. eine homogene Kugel oder einen homogenen Würfel mit dem Schwerpunkt als Stützpunkt).

Bei der Kreiselbewegung spielen nach § 53 die Vektoren des Drehimpulses $\mathfrak{N}$ und der

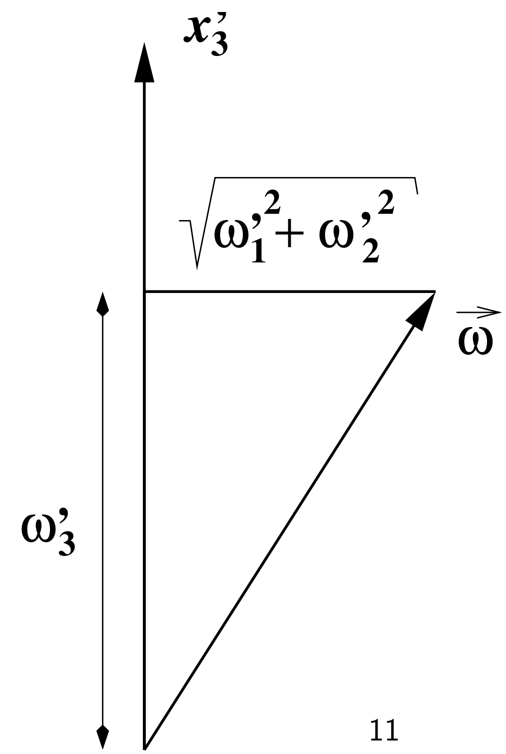
Den kräftefreien Kreisel kann man durch Stützung des Kreisels im Schwerpunkt erziehlen (links), oder annähernd durch die kardanische Aufhängung (rechts).

(4.) Freie Rotation des symmetrischen Kreisels (2 Hauptträgheitsmomente sind identisch: $\Theta_\perp \equiv \Theta_1 = \Theta_2 \wedge \Theta_\parallel \equiv \Theta_3$)

(a) Körperfestes System III:

Eulergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_\perp \dot{\omega}_1' &= -(\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\omega_2'\omega_3' \\ \Theta_\perp \dot{\omega}_2' &= (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\omega_1'\omega_3' \\ \Theta_\parallel \dot{\omega}_3' &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\omega_3' = \text{const.} \\ &\dot{\omega}_1' = -\Omega\omega_2' \quad \therefore \quad \Omega = \frac{\Theta_\parallel - \Theta_\perp}{\Theta_\perp}\omega_3' \\ &\dot{\omega}_2' = \Omega\omega_1' \end{aligned}$$



Allgemeine Lösung:

$$\omega_1' = A\cos\left(\Omega t + \varphi\right) \quad \wedge \quad \omega_2' = A\sin\left(\Omega t + \varphi\right)$$

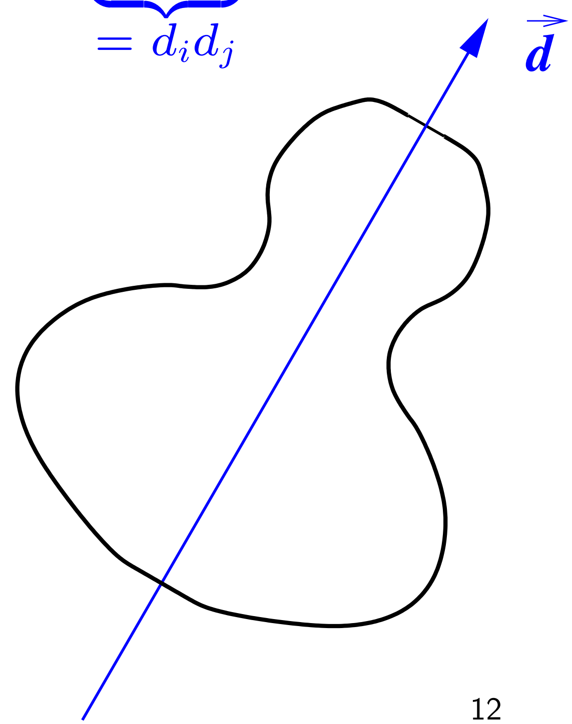
Der Vektor $\vec{\omega}$ umläuft die Figurenachse x_3' mit der Winkelgeschwindigkeit Ω

(b) Raumfestes System II:

$\vec{d}(t)$ sei Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse=Figurenachse: in dieser Konvention ist im System II die Zeitabhängigkeit von Θ_{ij} in $\vec{d}(t)$ enthalten

Mit Eigenwerten und Eigenvektoren können wir schreiben: $\Theta_{ij} = \sum_\alpha \Theta_\alpha a_i^{(\alpha)} a_j^{(\alpha)}$. Damit folgt für den symmetrischen Kreisel (wir wählen $a_i^{(3)} = d_i$):

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij} &= \Theta_\perp \left(a_i^{(1)} a_j^{(1)} + a_i^{(2)} a_j^{(2)} \right) + \Theta_\| a_i^{(3)} a_j^{(3)} \\
&= \Theta_\perp \underbrace{\left(a_i^{(1)} a_j^{(1)} + a_i^{(2)} a_j^{(2)} + a_i^{(3)} a_j^{(3)} \right)}_{=\delta_{ij}} + (\Theta_\| - \Theta_\perp) \underbrace{a_i^{(3)} a_j^{(3)}}_{=d_i d_j}
\end{aligned}$$



Der Drehimpuls wird also zu

$$N_i = \Theta_{ij}\omega_j = \Theta_\perp \omega_i + (\Theta_\| - \Theta_\perp) d_j \omega_j d_i$$

Damit gilt für den freien Kreisel ($\vec{N} = \text{const.}$)

$$\vec{N} = \Theta_\perp \vec{\omega} + \left(\Theta_\| - \Theta_\perp \right) \left(\vec{d} \cdot \vec{\omega} \right) \vec{d} \ \ (*)$$

Die Vektoren $\vec{N}$, $\vec{\omega}$ und $\vec{d}$ liegen also in einer Ebene

Außerdem gilt

$$\dot{\vec{d}} = \vec{\omega} \times \vec{d}$$

Damit gilt weiterhin ($\vec{\omega} \times \vec{d} \perp \vec{\omega}, \vec{d}$):

$$\frac{d}{dt}\vec{N}\vec{d} = \vec{N}\dot{\vec{d}} = \left(\Theta_\perp\vec{\omega} + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\left(\vec{d}\vec{\omega}\right)\vec{d}\right)\left(\vec{\omega} \times \vec{d}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{N}\vec{d} = |\vec{N}|\cos\vartheta = \text{const.}}\text{(I)}$$

Außerdem ist dann

$$\vec{N}\vec{d} = \Theta_\perp\vec{\omega}\vec{d} + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\vec{d}\vec{\omega} = \Theta_\parallel\vec{\omega}\vec{d} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{\omega}\vec{d} = |\vec{\omega}|\cos\alpha = \text{const.}}\text{(II)}$$

Und somit auch (ersetze $\vec{\omega}$ aus Gl. $(*)$)

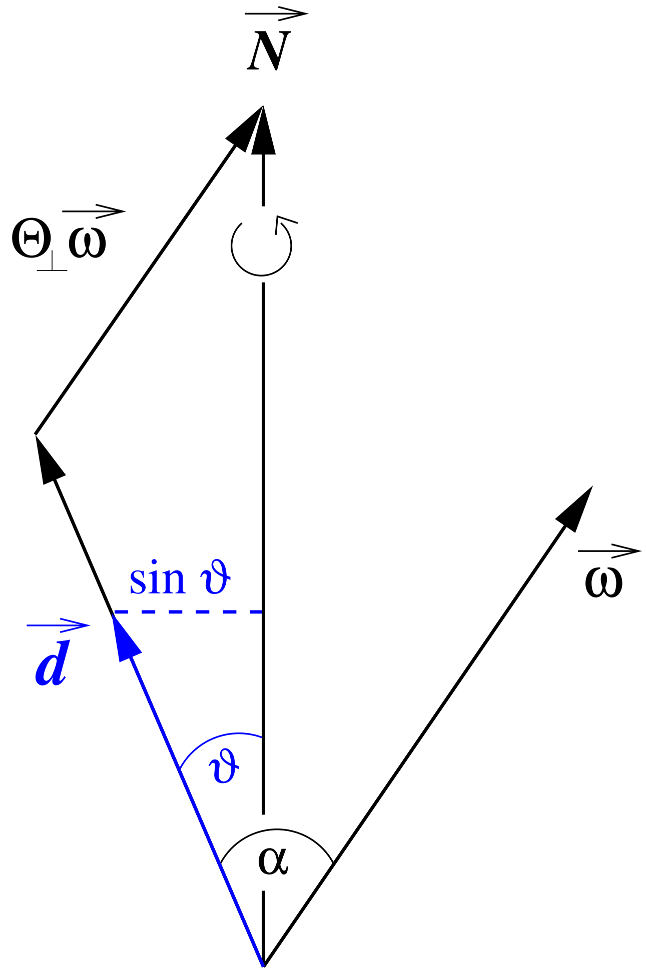
$$\dot{\vec{d}} = \vec{\omega} \times \vec{d} = \frac{\vec{N} - (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\left(\vec{d}\vec{\omega}\right)\vec{d}}{\Theta_\perp} \times \vec{d} = \frac{\vec{N} \times \vec{d}}{\Theta_\perp}$$

$$\left|\dot{\vec{d}}\right| = |\vec{\omega}|\sin\alpha = \frac{|\vec{N} \times \vec{d}|}{\Theta_\perp} = \frac{|\vec{N}|}{\Theta_\perp}\sin\vartheta = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \underline{|\vec{\omega}|\sin\alpha = \text{const.}}\text{ (III)}$$

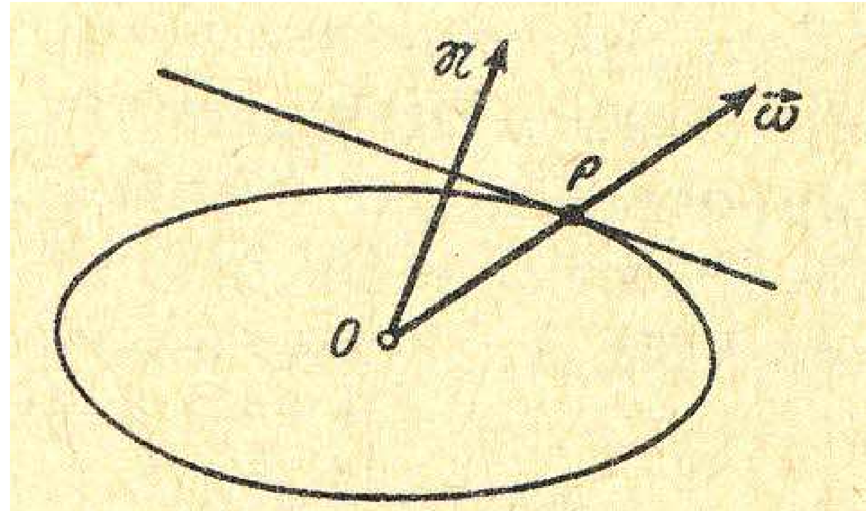
Aus den Gln. (I), (II) & (III) folgt aber: $|\vec{\omega}| = \text{const.}$, $\alpha = \text{const.}$ & $\vartheta = \text{const.}$

Dies ist die Nutationsbewegung des freien Kreisels: Figurenachse $\vec{d}$ und Drehvektor $\vec{\omega}$ drehen sich um den räumlich konstanten Drehimpulsvektor $\vec{N}$ mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{\mathrm{FA}} = \frac{\left|\dot{\vec{d}}\right|}{\sin\vartheta} = \frac{\left|\vec{N}\right|}{\Theta_\perp}$$



Poinsotsche Darstellung der Bewegung des freien Kreisels



Wir hatten (Hauptachsen):

$$N_1 = \Theta_1 \omega_1,\ N_2 = \Theta_2 \omega_2,\ N_3 = \Theta_3 \omega_3$$

Trägheitsellipsoid (Hauptachsen):

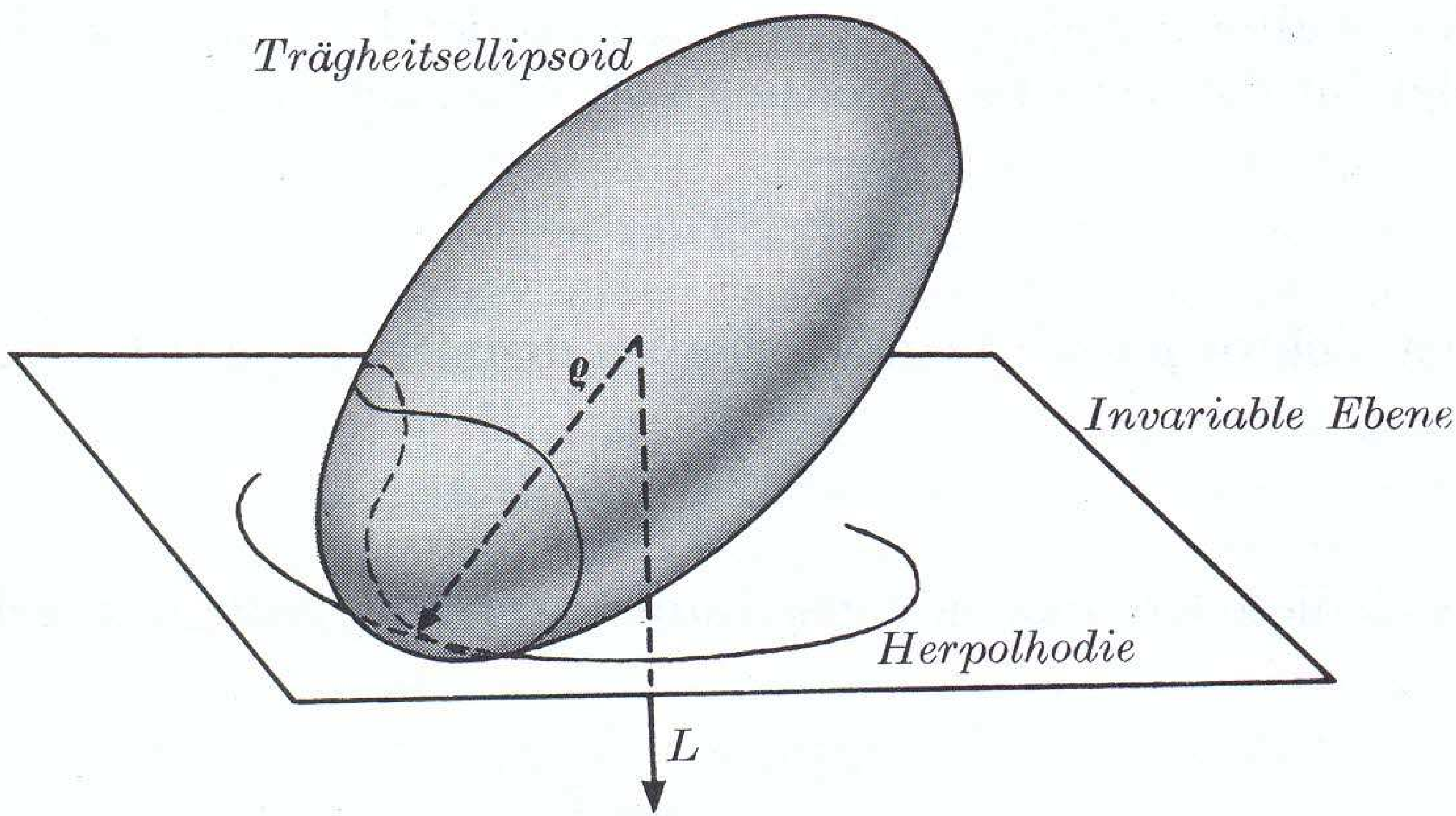
$$f = \Theta_1 x_1^2 + \Theta_2 x_2^2 + \Theta_3 x_3^2$$

Richtungskosinusse (Komponenten des Normalenvektor) $\perp$ zur Tangentialebene zum Punkt P der Fläche $f = const.$:

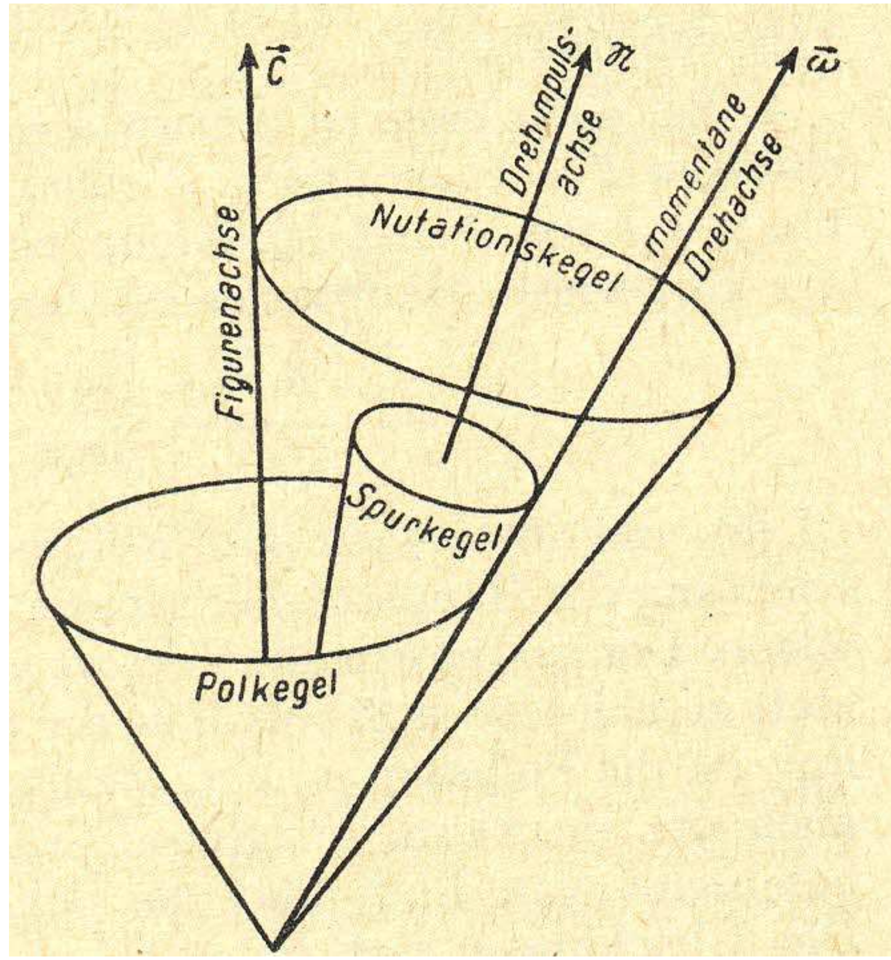
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\Theta_1 x_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2\Theta_2 x_2,\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2\Theta_3 x_3$$

Nach Konstruktion ist $\vec{OP} = (x_1, x_2, x_3) \parallel \vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und somit $x_1 : x_2 : x_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$, d.h., die Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ sind proportional zu Drehimpulskomponenten N_i. $\vec{N}$ fällt also mit $\vec{\omega}$ zusammen. Für Nichthauptachsen kann man analog zeigen, daß $\vec{N}$ immer senkrecht zur Tangentialebene zum Trägheitsellipsoid im Punkt P steht (Bild).

Da $\vec{N}$ im Raum fest ist und wegen des Energiesatzes auch $\vec{N} \cdot \vec{\omega} = const.$ (also die Projektion von $\vec{N}$ auf $\vec{\omega}$), bleibt die Ebene selbst im Raum fest: *invariable Ebene*. Sie wird ständig vom Poinsotschen Ellipsoid berührt in einem Punkt, dessen Geschwindigkeit null ist (da er auf der Drehachse liegt) $\Longrightarrow$ Der kräftefreie Kreisel bewegt sich so, daß das Poinsotsche Ellipsoid auf der invariablen Ebene rollt, ohne zu gleiten.


Trägheitsellipsoid
ϱ
Invariable Ebene
Herpolhodie
L

Die Figurenachse $\vec{C} = \vec{d}$ und die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ des symmetrischen Kreisels beschreiben je einen Kreiskegel um die raumfeste Drehimpulsachse $\vec{N}$, und zwar mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. $\vec{C}$, $\vec{N}$ und $\vec{\omega}$ liegen stets in einer Ebene. $\vec{C}$ und $\vec{\omega}$ führen um $\vec{N}$ eine reguläre Nutation aus. Der von $\vec{C}$ um $\vec{N}$ beschriebene Kegel wird Nutationskegel genannt.

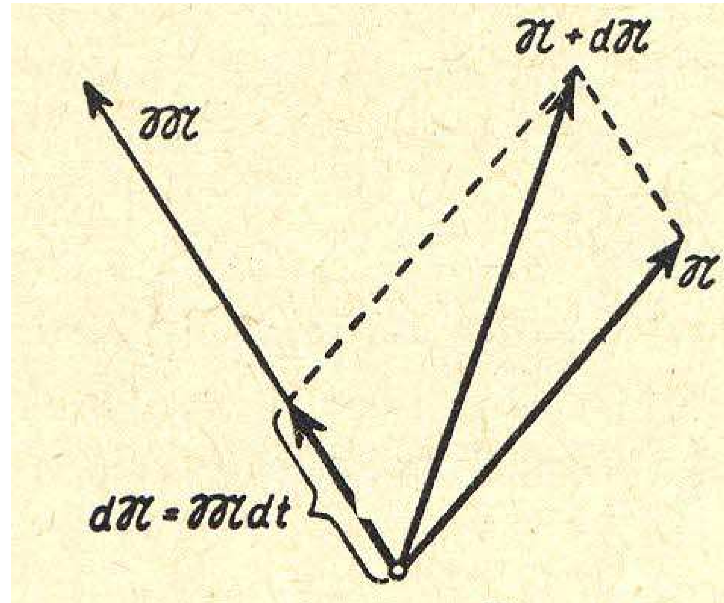


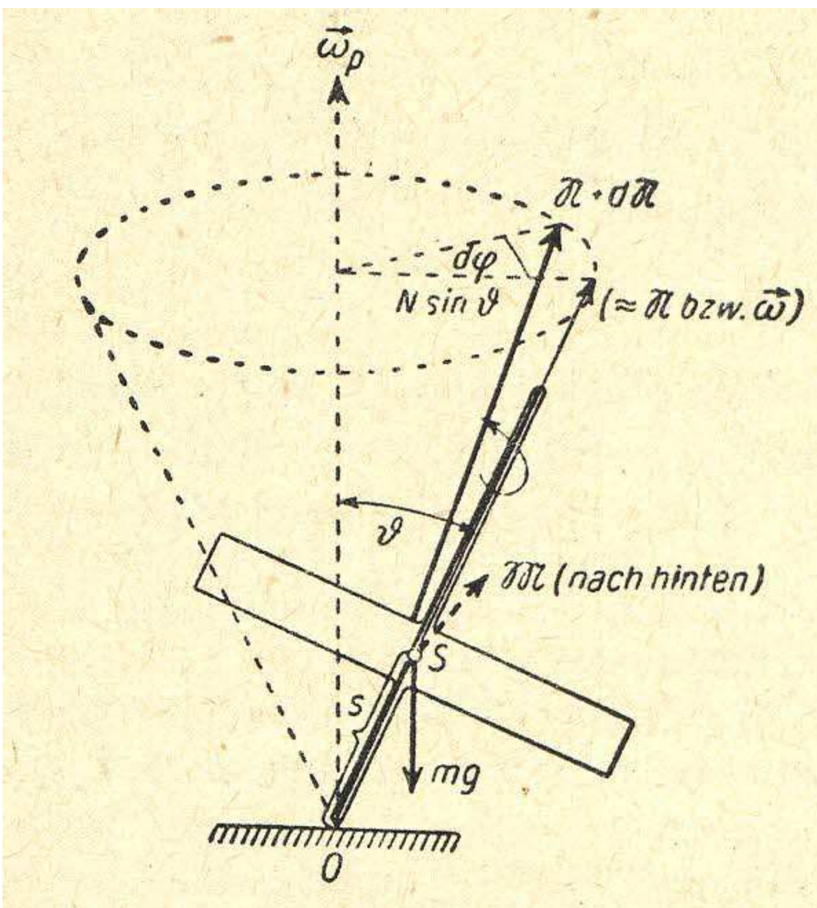
Die Präzession des schweren Kreisels

Drehimpulssatz im nicht-mitrotierten System:

$$\frac{d}{dt}\vec{N} = \vec{M} \text{ oder } d\vec{N} = \vec{M}\,dt:$$

Richtung von $\vec{N}$ nähert sich der von $\vec{M}$ (Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus)

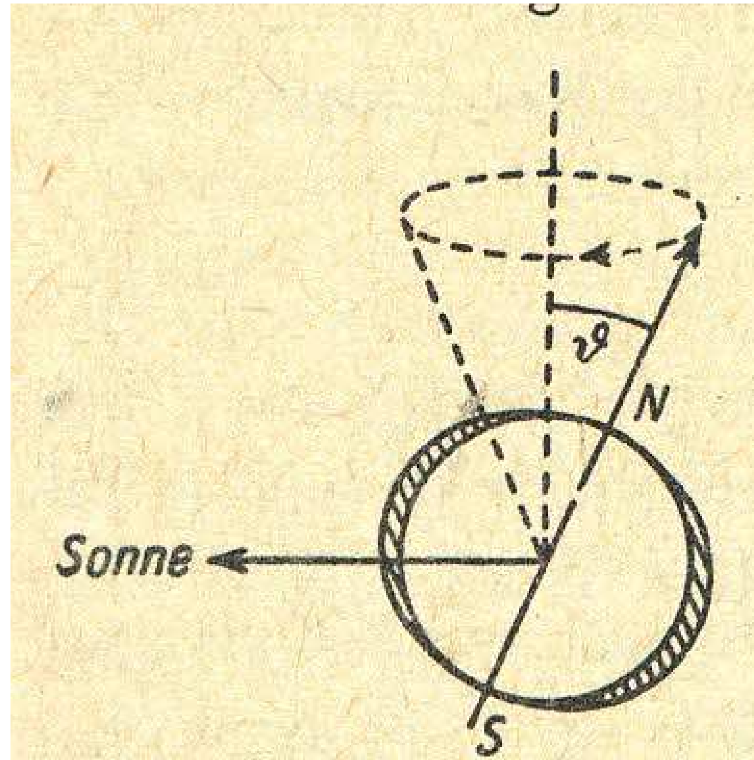


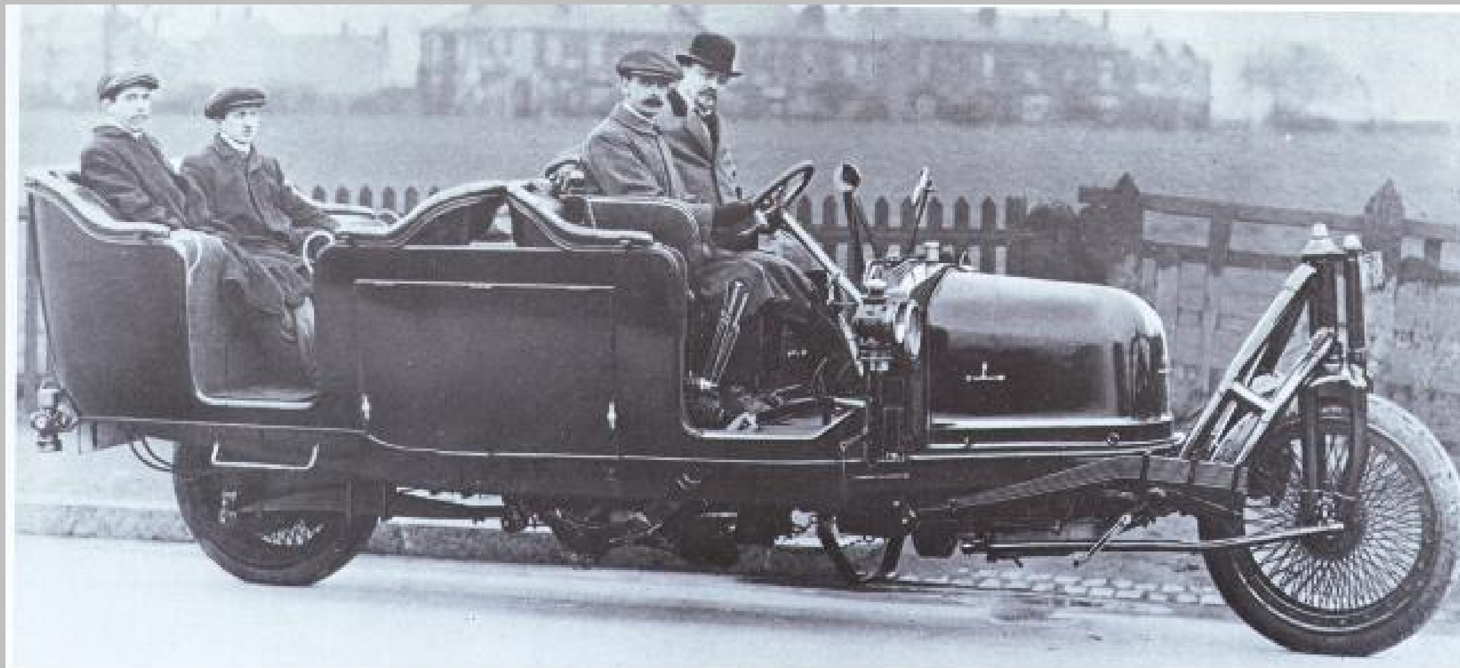


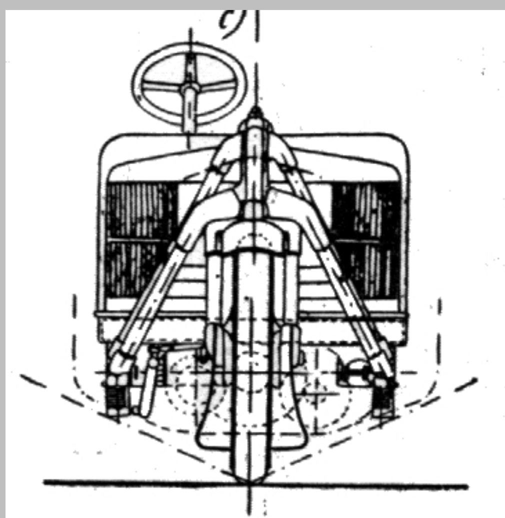
Sehr schnelle Rotation um Figurenachse $\vec{d}$: $\vec{d}$, $\vec{N}$ und $\vec{\omega}$ nahe beeinander. Im Schwerpunkt: $\vec{M} = \sum \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha = \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{g} = m\vec{r}_S \times \vec{g}$ Das horizontal gerichtete Moment $\vec{M}$ der Schwerkraft mg steht senkrecht zu $\vec{d}$ und $\vec{N}$ $\rightsquigarrow$ nur Richtung von $\vec{N}$ ändert sich: $|d\vec{N}| = N \sin\vartheta d\varphi$. Zur Zeit $t + dt$ steht $\vec{M}$ immer noch senkrecht $\Longrightarrow$ $\vec{d}$, $\vec{N}$ und $\vec{\omega}$ beschreiben einen Kreiskegel mit lotrechter Drehachse $\vec{\omega}_p$, die Präzession. Dieser ist die Nutation des freien Kreisels überlagert.

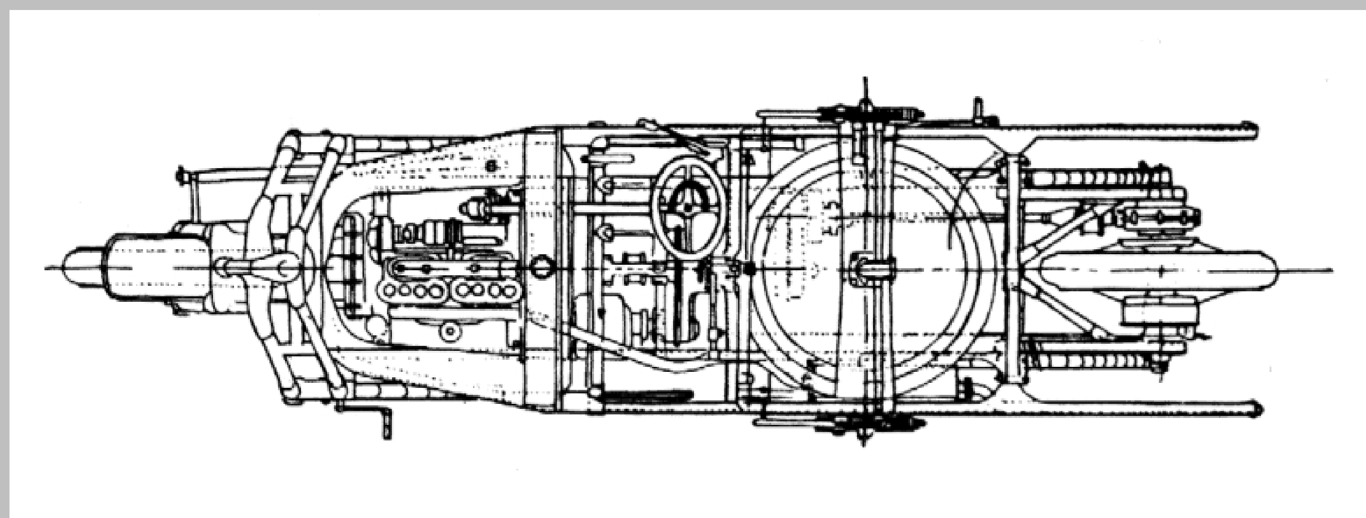
Präzession der Erdachse

Wegen Abplattung der Erde und Neigung der Drehachse gegen die Ekliptikachse ($\vartheta = 23.5°$) übt die Sonne ein Drehmoment auf die Erdachse aus, das die Erdachse zur Ekliptikachse parallel zu stellen sucht. Ähnlich wirkt der Mond. Die Erdachse beschreibt in rund 26,000 Jahren einen Präzessionskegel von $23.5°$ halber Öffnung.









Die Physik des Radfahrens

DE Jones, Physics Today **23**(4), 34-40 (1970)

Beschreibung durch den Drehtensor

Drehtensor D_{ik} transformiert die x_k (System II) in die x'_i (System III):

$$x'_i = D_{ik} x_k$$

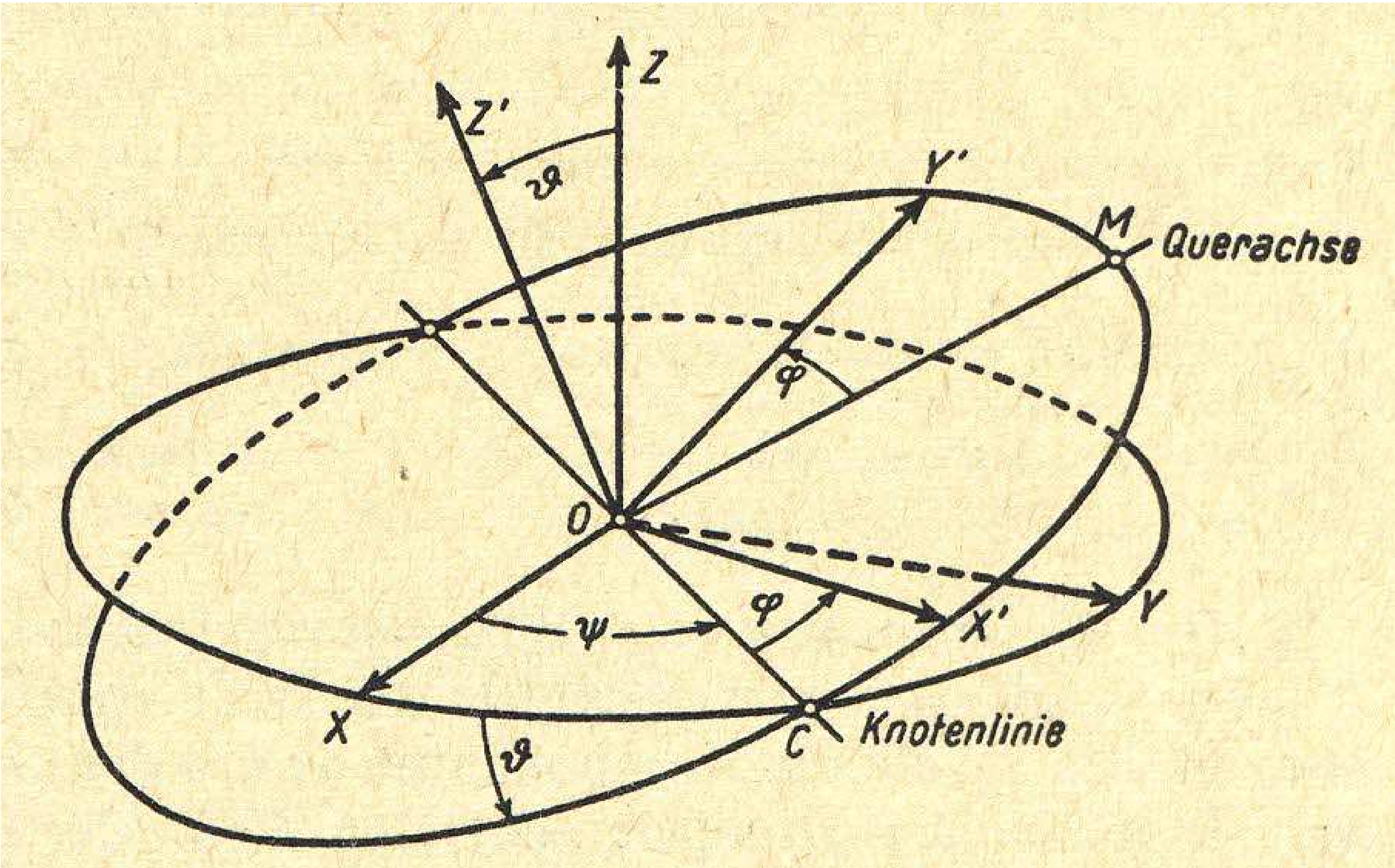
D_{ik} hat 9 Komponenten. Es gelten die Bedingungen (6 unabh. Gleichungen):

$$D_{ik} D_{jk} = \delta_{ij}$$

Damit sind nur 3 Komponenten unabhängig. Wir wählen die drei EULERwinkel

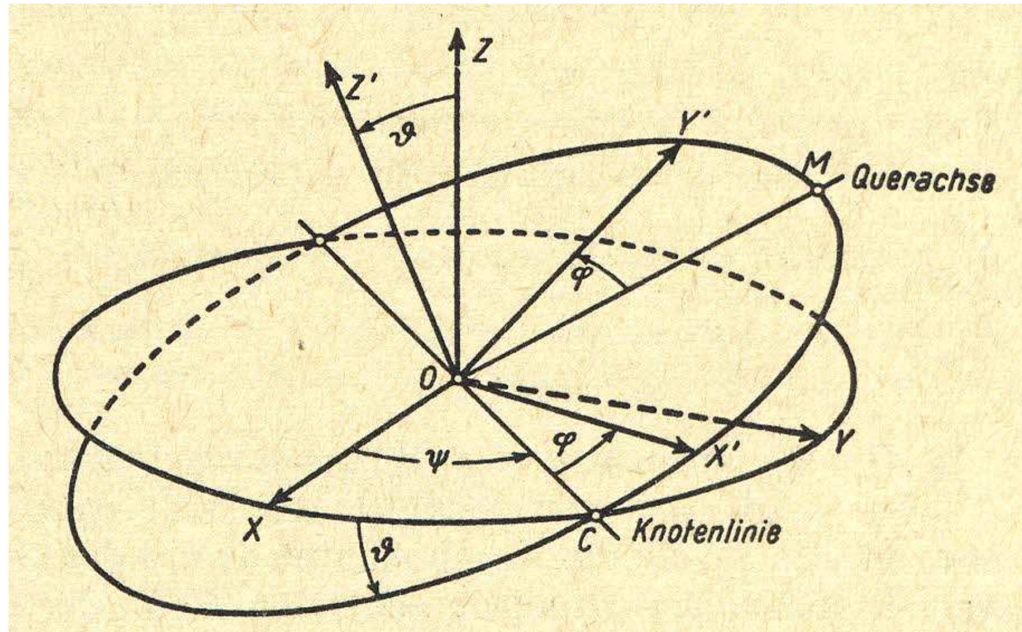
Gleiches Resultat: Starrer Körper hat 6 Freiheitsgrade, 3 davon sind Translation. Hält man einen Punkt fest, bleiben 3 Winkelkoordinaten übrig.

Eulerwinkel ψ, ϑ, φ



(1.) Drehung um x_3 mit Winkel ψ:

$$D_{ik}^{(1)}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(2.) Drehung um Knotenlinie mit Winkel ϑ:

$$D_{ik}^{(2)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

(3.) Drehung um x_3' mit Winkel φ:

$$D_{ik}^{(3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sukzessive Ausführung der drei Operationen:

$$D_{ik}(\psi, \vartheta, \varphi) = D_{is}^{(3)}(\varphi) D_{sj}^{(2)}(\vartheta) D_{jk}^{(1)}(\psi)$$

Man erhält damit:

$$D_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\psi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Die Umkehrung lautet:

$$D_{ij}^{-1} = D_{ij}^{T} = D_{ji} \quad \therefore \quad x_i = D_{ki} x'_k$$

Die drei Eulerwinkel zusammen mit den drei Koordinaten der Translation können als die 6 generalisierten Koordinaten benutzt werden.

Rotationsenergie als Funktion der Eulerwinkel

Im Hauptachsensystem:

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\Theta'_{ij}\omega'_i\omega'_j = \frac{1}{2}\Big(\Theta_1(\omega'_1)^2 + \Theta_2(\omega'_2)^2 + \Theta_3(\omega'_3)^2\Big)$$

Wir brauchen also die ω'_i als Funktion von ϑ, ψ, φ. Wegen $\dot{D}_{ki} = D_{si}\varepsilon_{sjk}\omega'_j$ (s. vor):

$$D_{li}\dot{D}_{ki} = \underbrace{D_{li}D_{si}}_{\delta_{ls}}\varepsilon_{sjk}\omega'_j = \varepsilon_{ljk}\omega'_j$$

Somit

$$\varepsilon_{kls}D_{li}\dot{D}_{ki} = \varepsilon_{kls}\varepsilon_{ljk}\omega'_j$$

Da

$$\varepsilon_{kls}\varepsilon_{ljk} = \varepsilon_{kls}\varepsilon_{klj} = \delta_{ll}\delta_{sj} - \delta_{lj}\delta_{ls} = 3\delta_{sj} - \delta_{sj} = 2\delta_{sj}$$

folgt

$$\varepsilon_{kls}D_{li}\dot{D}_{ki} = 2\omega'_s$$

Damit finden wir:

$$\omega'_s = \frac{1}{2}\varepsilon_{kls} D_{li} \dot{D}_{ki}$$

Berechnung dieses Ausdrucks führt auf

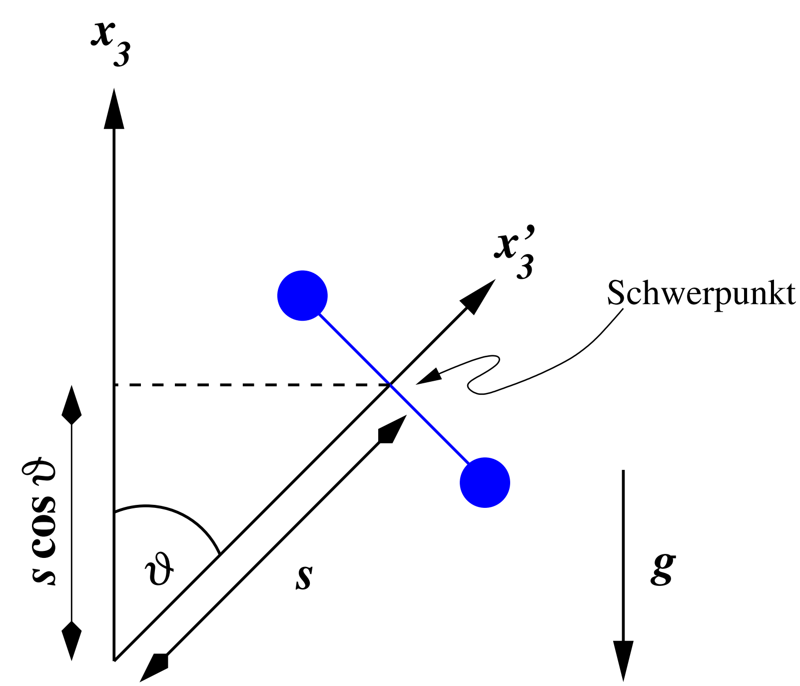
$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi \\
\omega'_2 &= -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi \\
\omega'_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta
\end{aligned}$$

Legen wir das köperfeste System III so, daß es mit den Hauptträgheitsachsen übereinstimmt, also $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(\Theta_1(\omega'_1)^2 + \Theta_2(\omega'_2)^2 + \Theta_3(\omega'_3)^2\right)$. Damit:

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi\right)^2 + \frac{\Theta_2}{2}\left(-\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi\right)^2 + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta\right)^2$$

Anwendung auf schweren symmetrischen Kreisel

Kreisel sei außerhalb des Schwerpunktes gelagert,
so daß die Schwerkraft ein Drehmoment bewirkt



Symmetrischer Kreisel: $\Theta_1 = \Theta_2 \equiv \Theta_\perp$, $\Theta_3 \equiv \Theta_\parallel$

Potentielle Energie: $V(\vartheta) = mgs\cos\vartheta$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T(\dot\vartheta, \dot\psi, \dot\varphi, \vartheta) &= \frac{\Theta_\perp}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\psi\sin^2\vartheta\right) \\ &\quad + \frac{\Theta_\parallel}{2}\left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta\right)^2 \end{aligned}$$

Lagrangefunktion $L = T - V$:

$$L(\dot\vartheta, \dot\psi, \dot\varphi, \vartheta) = \frac{\Theta_\perp}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\psi\sin^2\vartheta\right) + \frac{\Theta_\parallel}{2}\left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta\right)^2 - mgs\cos\vartheta$$

Die Winkel ψ und φ sind zyklisch

Folglich ergeben sich die Integrale der Bewegung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \Theta_\parallel \left(\dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta\right) = c_1 = const.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \Theta_\perp \dot\psi \sin^2\vartheta + \underbrace{\Theta_\parallel \left(\dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta\right)}_{c_1} \cos\vartheta = \Theta_\perp \dot\psi \sin^2\vartheta + c_1 \cos\vartheta = c_2 = const.$$

Anstelle der Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$ können wir direkt den Energiesatz benutzen:

$$T + V = \frac{\Theta_\perp}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\vartheta\right) + \underbrace{\frac{\Theta_\parallel}{2}\left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta\right)^2}_{c_1^2/[2\Theta_\parallel]} + mgs\cos\vartheta = E$$

Einsetzen von

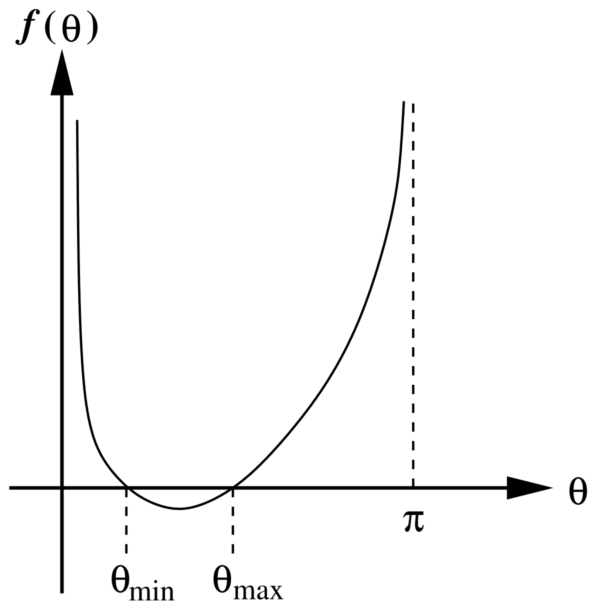
$$\dot\psi \sin\vartheta = \frac{1}{\Theta_\perp \sin\vartheta}\left[c_2 - c_1\cos\vartheta\right]$$

liefert

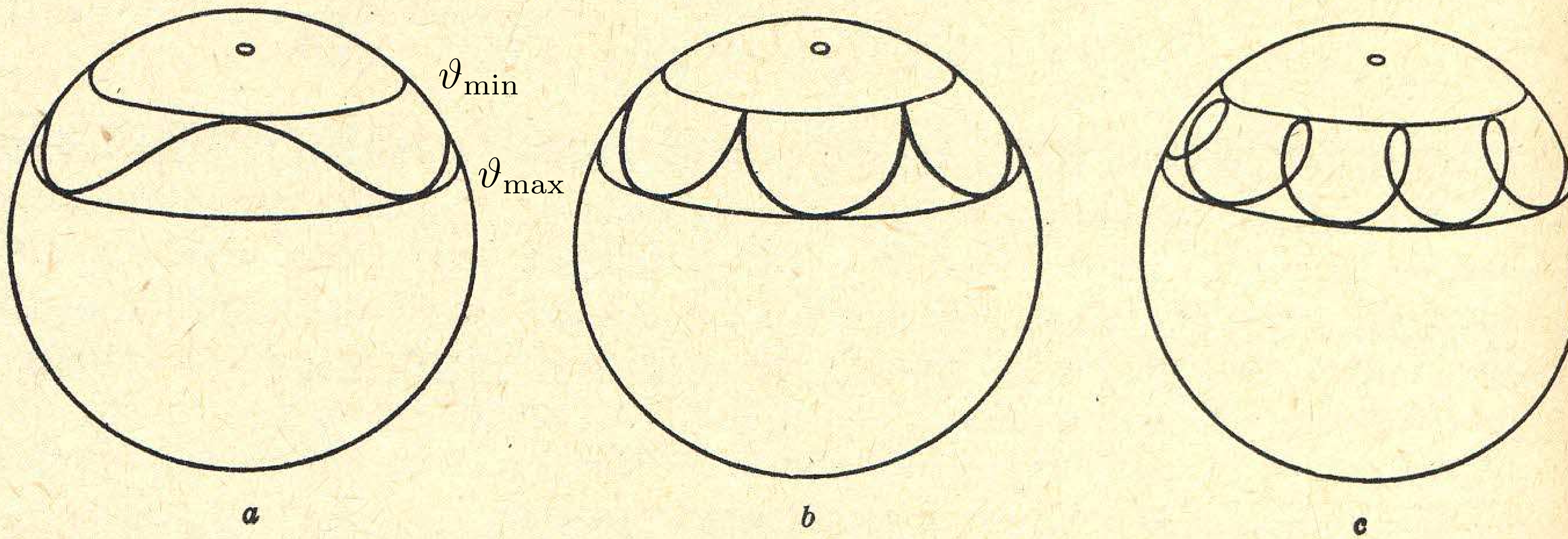
$$\dot\vartheta^2 - \frac{2}{\Theta_\perp}E + \frac{c_1^2}{\Theta_\perp\Theta_\parallel} + \frac{2mgs}{\Theta_\perp}\cos\vartheta + \frac{(c_2 - c_1\cos\vartheta)^2}{\Theta_\perp^2 \sin^2\vartheta} \equiv \dot\vartheta^2 + f(\vartheta) = 0$$

Eine Lösung durch Quadratur $\int \Big(- f(\vartheta)\Big)^{-1/2} d\vartheta = t$ führt auf elliptische Funktionen.

Qualitativ können wir $\dot{\vartheta}^2 + f(\vartheta) = 0$ als Energiesatz einer eindimensionalen Bewegung verstehen. Ist $c_1 \neq c_2 \Longrightarrow \lim_{\vartheta\to 0} f(\vartheta) = \lim_{\vartheta\to\pi} f(\vartheta) = \infty$. Die genaue Form von $f(\vartheta)$ hängt von den Parametern ab. Eine mögliche Form ist:



Winkel schwankt zwischen $\vartheta_{\min}$ und $\vartheta_{\max}$: NUTATION der Figurenachse. Gleichzeitig umkreist die Figurenachse die x_3-Achse. Es ergibt sich folgender qualitativer Verlauf der Figurenachse auf der Einheitskugel:


$\vartheta_{\min}$
$\vartheta_{\max}$
a
b
c

Präzession ohne Nutation: Es soll $\vartheta = const.$ sein, also nach der Langrangegl. 2. Art:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \Theta_\perp \dot{\psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - \Theta_\parallel \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta\right) \dot{\psi} \sin\vartheta + mgs \sin\vartheta = 0$$

Ist Präzessionsgeschwindigkeit $|\dot{\psi}|$ klein gegen Drehgeschwindigkeit $|\dot{\varphi}|$ des Kreisels, dann gilt mit $c_1 \approx \Theta_\parallel \omega_3'$ näherungsweise

$$\dot{\psi} = \frac{mgs}{\Theta_\parallel \omega_3}.$$

Abrollen eines Rotationskörpers auf einer schiefen Ebene

Reines Rollen: $\dot{s} = r\dot{\varphi}$ oder $v = r\omega \rightsquigarrow s = r\varphi + s_0$: ein Freiheitsgrad. Kräfte:

1. Schwerkraft mit x und y Komponenten $mg\sin\alpha$ und $-mg\cos\alpha$.
2. Von der schiefen Ebene in y-Richtung auftretende Normalkraft N.
3. Die das Gleiten verhindernde Haftreibung R_0 mit Richtung $-x$.

Schwerpunktskoordinaten: $x = s = r\varphi + const.$, $y = 0$. Gleichungen für Schwerpunkt:

$$m\ddot{s} = mr\dot{\omega} = mg\sin\alpha - R_0 \quad (*) \qquad 0 = -mg\cos\alpha + N$$

Momentengleichung für M_z:

$$\Theta\ddot{\varphi} = \Theta\dot{\omega} = rR_0$$

Einsetzen von R_0 in (*):

$$\dot{\omega} = g\sin\alpha\frac{mr}{\Theta + mr^2}$$

Somit folgen die Zwangskräfte:

$$N = mg\cos\alpha, \quad R_0 = \frac{mg\sin\alpha\Theta}{\Theta + mr^2}$$

Kein Gleiten: aus $R_0 \leq \mu_0 N$ folgt:

$$\tan\alpha \leq \mu_0[\Theta + mr^2]/\Theta$$

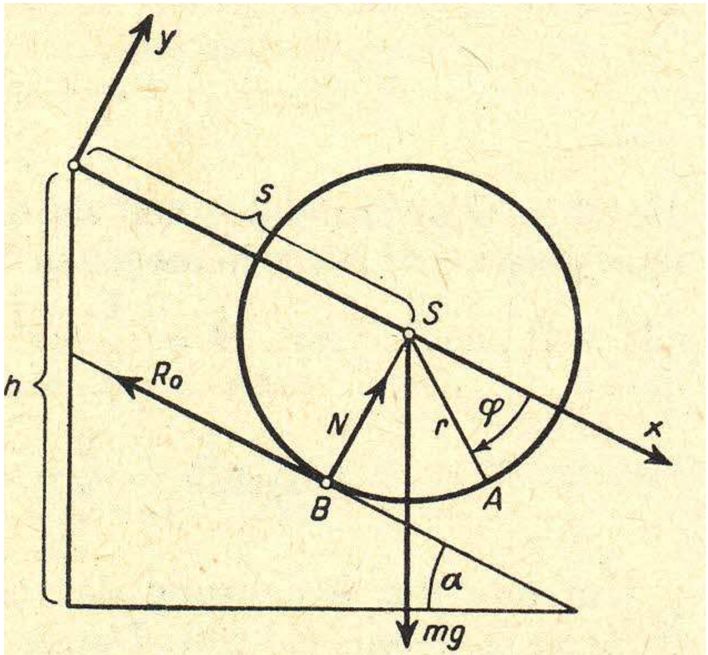
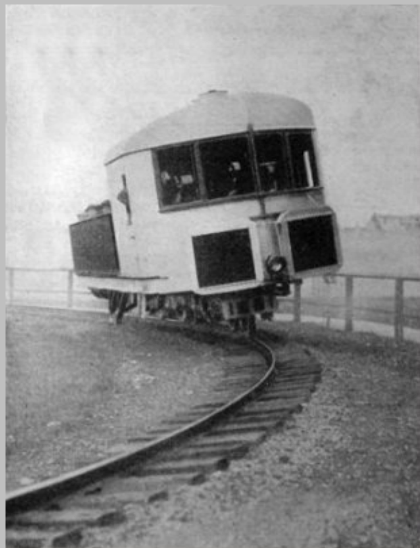
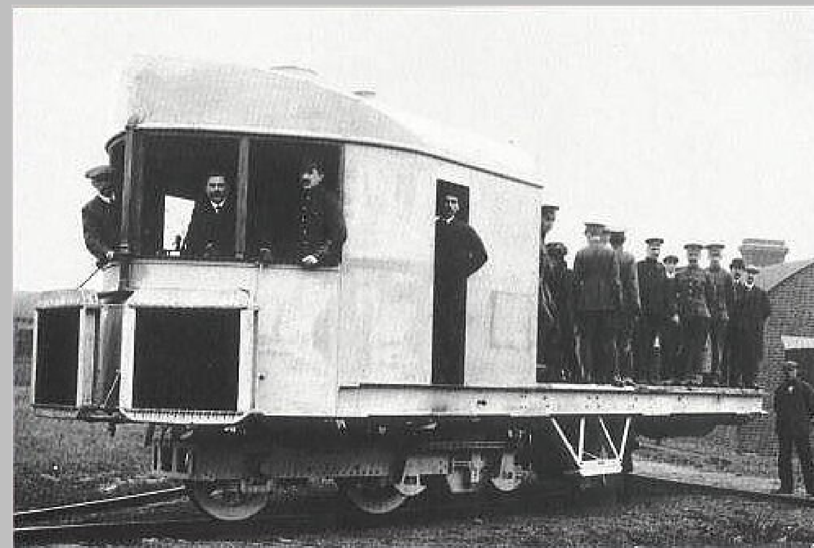


Abb. 108






`Kreisel/prg003/mov004.mod` Levitron

`Kreisel/prg003/mov006.mod` Kippkreisel

`Kreisel/prg003/mov008.mod` Oloide

Papers zum Levitron:

MV Berry, Proc Roy Soc London A **452**, 1207 (1996)

MD Simon, LO Heflinger, & SL Ridgway, Amer J Phy **65**, 286 (1997)