Einschub: Dirac'sche Deltafunktion:

Die Dirac'sche Deltafunktion ist keine Funktion im herkömmlichen mathematischen Sinn. Sie ist durch die nachfolgend gegeben Integraldarstellungen definiert und nicht wirklich durch die Vorgabe einer eindeutigen Zuordnung von Argumenten und Funktionswerten. Sie ist eine sogenannte Distribution oder auch Funktional genannt. Ihre Anwendung erfolgt vorwiegend in Funktionalbeziehungen des Typs

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, \delta(x - x_0) \;=\; f(x_0) \quad , \tag{1}$$

Diese Distribution geht bei $x = 0$ so stark gegen unendlich, dass ein endliches Integral entsteht

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) \;=\; 1 \quad . \tag{2}$$

Oft ist es vorteilhaft, die δ-Funktion als Grenzwerte stetiger Funktionen $\varphi(x, \varepsilon)$ darzustellen (Parameter: Grenzwertbildung $\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \varphi(x, \varepsilon)$ zeigt Charakter der δ-Funktion), die analoge Relationen (1) & (2) befriedigen. Für die Gauß-Funktion

$$\varphi(x - x', \varepsilon) \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - x')^2}{\varepsilon^2}\right\} \tag{3}$$

können die Eigenschaften (1) & (2) bei gleichmäßiger Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, \varphi(x - x', \varepsilon)$ durch Grenzwertbildung (unterm Integral) $\varepsilon \to 0$ gezeigt werden (**Übung**).

Die folgenden Fourierdarstellungen für die δ-Funktion sind etwas mit Vorsicht zu geniesen, da sie alle nur in *Verbindung mit einem Integral als Integrand* existieren. Eine, auch schon oben verwendete (und für die **Übung** hilfreiche) Darstellung ist das Fourierintegral

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \lim_{K \to \infty} \int\limits_{-K}^{K} \mathrm{d}k\, \exp(\imath k x) \quad . \tag{4}$$

Man kann diese Darstellung schnell mit Hilfe der Eulerschen Beziehung motivieren

$$\int\limits_{-K}^{K} \mathrm{d}k\, \exp(\imath k x) \;=\; \int\limits_{-K}^{K} \mathrm{d}k\, [\cos(kx) \;+\; \imath \sin(kx)] \quad . \tag{5}$$

Nun ist zu beachten, dass in dieser Darstellungen der Grenzwert erst nach Einsetzen in die Definition (1) vollzogen werden darf – so das x Integral konvergiert. Im Fall von stetigen und beschränkten Funktionen $f(x)$ darf Grenzübergang und Integration auch vertauschen, so dass (4) als Fourier-Darstellung der δ-Funktion angesehen werden darf (trotzdem Vorsicht !).
Nach einigen Umrechnungen (**Übung**, ebenso Begründung der unten (6) &(7) aufgeführten Grenzwerte) erhält man

$$\delta(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{\sin(Lx)}{\pi x} \quad . \tag{6}$$

Eine andere Darstellungen ist

$$\delta(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \quad . \tag{7}$$

Die Deltafunktion mit Vektorargument $\vec{r}$ ist gegeben mit

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^3k \, \exp\left(\imath\vec{k}\cdot\vec{r}\right) \quad . \tag{8}$$

Für die Ableitung der Deltafunktion, eine ungerade Funktion (da $\delta(-x) = \delta(x)$ gerade ist), kann man schreiben (**Übung**)

$$\delta'(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{L\to\infty} \left[\frac{L\cos(Lx)}{x} - \frac{\sin(Lx)}{x^2}\right] \tag{9}$$

Integrale mit $\delta'(x)$ führen nach partieller Integration auf die nützliche Beziehung

$$\int \mathrm{d}x\, \delta'(x)\, f(x) = -f'(0) \quad . \tag{10}$$

Eine Reihe wichtiger Relationen sei hier ohne Herleitung aufgeführt

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{11}$$

$$x\,\delta(x) = 0 \tag{12}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x) \tag{13}$$

$$f(x)\,\delta(x-y) = f(y)\,\delta(x-y) \tag{14}$$

$$\int \mathrm{d}x\,\delta(a-x)\,\delta(x-b) = \delta(a-b) \tag{15}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2\,|a|} \tag{16}$$

$$\delta\left\{\varphi(x)\right\} = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_i}\right|} \tag{17}$$

wobei x_i die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ sind.