

# Stochastische Prozesse und Statistische Methoden

A. Pikovski

Institut für Physik  
Universität Potsdam

Wintersemester 2002-2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>4</b>
1.1	Eine Zufallsvariable . . . . .	4
1.1.1	Wahrscheinlichkeitsdichte . . . . .	4
1.1.2	Mittelwerte und Momente . . . . .	5
1.1.3	Die charakteristische Funktion und die Kumulanten . . . . .	6
1.2	Mehrdimensionale Zufallsvariablen . . . . .	7
1.2.1	Wahrscheinlichkeitsdichte, charakteristische Funktion . . . . .	7
1.2.2	Summe der Zufallsvariablen, Zentraler Grenzsatz . . . . .	9
1.2.3	Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	10
1.2.4	Bemerkungen zum numerischen Verfahren . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Zufallsprozesse</b>	<b>12</b>
2.1	Dichte, Momente, Stationarität, Ergodizität . . . . .	12
2.2	Spektrale Eigenschaften . . . . .	14
2.2.1	Karhunen-Loève-Zerlegung . . . . .	18
2.2.2	Transformation Zufallsprozessen in linearen Systemen . . . . .	19
2.2.3	Diffusion auf langen Zeitskalen . . . . .	20
2.2.4	Kreuzkorrelation und Kreuzspektrum . . . . .	22
2.2.5	Impulsprozesse . . . . .	23

<b>3</b>	<b>Markov-Prozesse</b>	<b>26</b>
3.1	Chapman-Kolmogorov-Gleichung . . . . .	26
3.2	Master-Gleichung . . . . .	28
3.3	Markov-Ketten . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Die Fokker-Planck-Gleichung</b>	<b>33</b>
4.1	Von der Master-Gleichung zur Fokker-Planck-Gleichung . . . . .	33
4.2	Die Langevin-Methode . . . . .	35
4.3	Zufallszeiten bis zum Erreichen einer Schwelle . . . . .	41
4.4	Stochastische Resonanz . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Einige stochastische Methoden</b>	<b>49</b>
5.1	Mittelung von stochastischen Gleichungen . . . . .	49
5.2	Lineare stochastische Gleichungen . . . . .	52
5.2.1	Die Dayson-Gleichung . . . . .	54
5.3	Zufallsattraktor . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Self-avoiding walk, Perkolation</b>	<b>57</b>
6.1	Self-trapping walk . . . . .	57
6.2	Self-avoiding walk (SAW) . . . . .	57
6.3	Perkolation . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Lokalisierung</b>	<b>61</b>
7.1	Modelle . . . . .	61
7.2	Wichtige Größen . . . . .	62
7.2.1	Zustandsdichte . . . . .	62
7.2.2	Eigenfunktionen . . . . .	62
7.2.3	Lyapunov-Exponent . . . . .	63

---

7.3	Diskretes (Anderson) Modell . . . . .	64
7.4	Delta-korreliertes Potential . . . . .	65
7.5	Reflektion von einer ungeordneten Schicht . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Irrweg in der Zufallsumgebung</b>	<b>67</b>
<b>9</b>	<b>Getriebene Oberfläche</b>	<b>70</b>
9.1	Edwards-Wilkenson-Gleichung . . . . .	70
9.2	KPZ-Gleichung . . . . .	72
<b>10</b>	<b>Turbulenz</b>	<b>74</b>
10.1	Skalengesetze . . . . .	74
10.2	Korrelationstheorie . . . . .	76
10.3	Spektrale Theorie . . . . .	77

# Kapitel 1

## Zufallsvariablen

### 1.1 Eine Zufallsvariable

#### 1.1.1 Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine Zufallsvariable  $x$  wird durch

- Die Menge aller möglichen Werte (z.B. die Menge der Punkte der reellen Achse)
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dieser Menge

gegeben. Die Menge kann sowohl diskret als auch kontinuierlich sein. Zuerst betrachten wir nur skalare Zufallsvariablen.

Die Wahrscheinlichkeit wird entsprechend der Kolmogorov-Axiomatik gegeben. Für jedes Ereignis  $A$  gilt  $P(A) \geq 0$ , und für verschiedene sich ausschliessende Ereignisse

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} = \sum P(A_i)$$

Ausserdem  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\text{die ganze Menge}) = 1$ .

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Funktion  $W(\xi) = \text{Prob}(x \leq \xi)$ . Diese Funktion nimmt nie ab und hat die Randbedingungen  $W(-\infty) = 0$ ,  $W(\infty) = 1$ . Die Wahrscheinlichkeit, die Variable  $x$  in einem Intervall  $a < x \leq b$  zu finden ist  $W(b) - W(a) = \int_a^b dW(x)$ . Das Integral hier ist ein Stiltjes-Integral. Man sagt, dass damit ein Wahrscheinlichkeitsmass auf der reellen Achse definiert wird. Jedes Mass kann in drei Komponenten zerlegt werden:

1. Der kontinuierliche differenzierbare Teil  $dW \sim dx$ . Diese Teil hat eine Dichte  $w(x) = dW/dx$ .

2. Der diskrete Teil ergibt Sprünge der Funktion  $W$ . Ein Sprung  $W(x_0 + 0) - W(x_0) = p$  bedeutet, dass die Zufallsvariable den Wert  $x_0$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  annimmt. Die Dichte kann auch geschrieben werden, ist aber eine verallgemeinerte Deltafunktion:  $w(x) = p\delta(x - x_0)$ .
3. Der kontinuierliche singuläre Teil, die ein fraktales Maß beschreibt. Hier gilt  $dW \sim (dx)^\gamma$ , wobei  $0 < \gamma < 1$ .

Das gesamte Maß kann alle drei Komponenten beinhalten.

Beispiele:

Kontinuierliche Verteilung: Alle Zahlen auf dem Interval  $0 \leq x \leq 1$  sind gleich wahrscheinlich,  $w(x) = 1$ .

Diskrete Verteilung: Die ganzen Zahlen  $x = 1, 2, \dots$  mit der Dichte  $w(x) = \sum 2^{-n}\delta(x-n)$ .

Fraktale Verteilung: Wir stellen jede Zahl  $0 \leq x \leq 1$  als einen binären Bruchteil dar  $x = 0,0110100\dots$ , und weisen 0 eine Wahrscheinlichkeit  $p$  und 1 die Wahrscheinlichkeit  $q = 1-p$  zu. Dann hat jede Menge, die durch einen endlichen binären Bruchteil dargestellt wird, die Wahrscheinlichkeit  $p^n q^m$ , wobei  $n$  und  $m$  die Anzahlen von 0 und 1 sind. Das Verhältnis

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{p^n q^m}{(1/2)^{n+m}}$$

kann jeden Wert zwischen  $\infty$  und 0 annehmen und hat keinen Grenzwert bei  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Wir werden hier immer  $w(x)$  schreiben und die Dichte als (möglicherweise) verallgemeinerte oder fraktale Funktion betrachten.

### 1.1.2 Mittelwerte und Momente

Der Mittelwert einer Funktion der Zufallsvariable ist

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)w(x) dx$$

Aus dieser Definition folgt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte selbst als ein Mittelwert dargestellt werden kann

$$w(y) = \langle \delta(y - x) \rangle = \int \delta(y - x)w(x) dx$$

Die Momente sind die Mittelwerte von Potenzen:  $M_m = \langle x^m \rangle$ . Das erste Moment ist dabei der Mittelwert

$$M_1 = \langle x \rangle$$

Für den zweiten Moment  $M_2 = \langle x^2 \rangle$  können wir schreiben

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = M_2 - M_1^2 = D$$

Diese Größe heisst die Varianz.

### 1.1.3 Die charakteristische Funktion und die Kumulanten

Die Fourier-Transformation der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$G(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int e^{ikx} w(x) dx$$

ist die charakteristische Funktion. Für sie gilt  $G(0) = 1, |G(k)| \leq 1$ . Nach Entwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir die Momente

$$G(k) = \int \sum \frac{(ik)^n}{n!} x^n w(x) dx = \sum \frac{(ik)^n}{n!} M_n$$

Aus dieser Formel folgt

$$M_n = (-i)^n \frac{d^n G(k)}{dk^n}$$

Enwickelt man  $\ln G$  nach  $k$ , so erhält man

$$\ln G = \sum_1^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \kappa_m$$

Man nennt  $\kappa_m$  die Kumulanten. Wir haben also zwei Darstellungen der charakteristischen Funktion

$$G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} M_n = e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \kappa_m}$$

Nach dem Vergleich

$$1 + ikM_1 - \frac{k^2}{2}M_2 - \frac{ik^3}{6}M_3 \dots = e^{ik\kappa_1 - \frac{k^2}{2}\kappa_2 \dots}$$

erhalten wir einen Zusammenhang zwischen Momenten und Kumulanten

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= M_1 \\ \kappa_2 &= M_2 - M_1^2 = D \\ \kappa_3 &= M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3 \\ \kappa_4 &= M_4 - 4M_3M_1 - 3M_2^2 + 12M_2M_1^2 - 6M_1^4 \end{aligned}$$

Zur Charakterisierung von Verteilungen werden häufig folgende Verhältnisse benutzt:

$$\gamma_1 = \frac{\bar{M}_3}{D^{3/2}} = \frac{\kappa_3}{D^{3/2}} \quad \gamma_2 = \frac{\bar{M}_4}{D^2} - 3 = \frac{\kappa_4}{D^2}$$

Hier sind  $\bar{M}_n$  die zentralen Momente  $\bar{M}_n = \langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle$ .  $\gamma_1$  heisst Schiefe und  $\gamma_2$  heisst Steilheit (Kurtosis).

### Beispiele.

1. Die Verteilung  $w(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ . Die Momente sind  $M_n = \frac{n!}{\lambda^n}$ , so dass  $\langle x \rangle = 1/\lambda$ ,  $D = 1/\lambda^2$ . Die charakteristische Funktion ist  $G(k) = \frac{\lambda}{\lambda - ik}$ .

2. Die Gaussische Verteilung

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2D}\right]$$

hat die charakteristische Funktion

$$G(k) = e^{ik\langle x \rangle - \frac{k^2 D}{2}}$$

Die Momente sind  $\bar{M}_{2n+1} = 0$ ,  $\bar{M}_{2n} = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)D^n$ . Die Schiefe und die Steilheit sind Null.

Es gibt einen Satz: Sei die charakteristische Funktion  $G(k) = e^{P_n(k)}$ , wobei  $P_n$  ein Polynom  $n$ -te Ordnung ist, dann  $n = 2$ . Das bedeutet, dass entweder unendlich viele Kumulanten nicht Null sind, oder es ist eine Gaussische Verteilung.

3. Cauchy-Verteilung

$$w(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2}$$

Hier  $G(k) = e^{i\alpha k - \lambda|k|}$ . Man kann sehen, dass  $M_1$  nicht existiert, und  $M_2 = \infty$ .

Betrachten wir eine Funktion der Zufallsvariable  $x$ :  $y = f(x)$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $y$  ist

$$w_y(y) = \langle \delta(y - f(x)) \rangle = \int \delta(y - f(x)) w_x(x) dx = \sum_{\text{alle Wurzeln } f(x)=y} \frac{w_x(x_i)}{|f'(x_i)|}$$

Für eine one-to-one Funktion kann man einfacher schreiben  $|w_x(x) dx| = |w_y(y) dy|$ .

## 1.2 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

### 1.2.1 Wahrscheinlichkeitsdichte, charakteristische Funktion

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $x_1, \dots, x_n$  wird durch die Dichte  $w(x_1, \dots, x_n)$  gegeben. Ein Teil von Variablen  $x_1, \dots, x_s$  wird durch die Randverteilungsdichte

$$w(x_1, \dots, x_s) = \int w(x_1, \dots, x_n) dx_{s+1} \dots dx_n$$

gegeben. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$w_{s|n-s} = \frac{w(x_1, \dots, x_n)}{w(x_{s+1}, \dots, x_n)}$$

ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, die Werte  $(x_1, \dots, x_s)$  zu beobachten, vorausgesetzt die Variablen  $x_{s+1} \dots x_n$  bestimmte Werte haben. Wenn die bedingte Wahrscheinlichkeit von die Gruppe  $x_{s+1}, \dots, x_n$  unabhängig ist, dann

$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_1, \dots, x_s)w(x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Im Allgemeinen: Wenn alle Zufallsvariablen unabhängig sind, ist die Gesamtdichte ein Produkt von Einzelndichten:

$$w(x_1 \dots x_n) = w_1(x_1)w_2(x_2) \dots w_n(x_n)$$

Die Momente:

$$\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \rangle = \int x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} w(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Die charakteristische Funktion

$$G(k_1, k_2, \dots, k_n) = \langle e^{ik_1 x_1 + \dots + ik_n x_n} \rangle$$

Die Kumulanten

$$\ln G = \sum \frac{(ik_1)^{m_1} (ik_2)^{m_2} \dots (ik_n)^{m_n}}{m_1! m_2! \dots m_n!} \langle \langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \rangle \rangle$$

Am wichtigsten sind die Momente und Kumulante zweiter Ordnung:

$$\langle x_i x_j \rangle$$

$$\langle \langle x_i x_j \rangle \rangle = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle$$

Diese Kumulante heisst die Kovarianz. Wenn man normiert

$$\rho_{ij} = \frac{\langle \langle x_i x_j \rangle \rangle}{\sqrt{D_x D_y}}$$

bekommt man den Korrelationskoeffizient.

Wenn zwei Zufallsvariablen unabhängig sind, dann

1.  $\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \rangle = \langle x_1^{m_1} \rangle \langle x_2^{m_2} \rangle$
2.  $G(k_1, k_2) = G_1(k_1)G_2(k_2)$
3.  $\langle \langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \rangle \rangle = 0$  wenn  $m_1 \neq 0$  und  $m_2 \neq 0$

Die Zufallsvariablen heißen unkorreliert, wenn  $\rho_{12} = 0$ .

### Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeitsdichte zweier Gaußscher Zufallsvariablen

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_y (1 - \rho^2)}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[ \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{D_x} - 2\rho \frac{(x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle)}{\sqrt{D_x D_y}} + \frac{(y - \langle y \rangle)^2}{D_y} \right] \right]$$

ist von 5 Parametern  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, D_x, D_y, \rho$  abhängig. Wenn  $\rho = 0$ , sind die Gaußsche Variablen unabhängig.

Im Allgemeinen definiert man für mehrere Gaußsche Variablen die Kovarianzmatrix

$$\sigma_{ij} = \langle \langle x_i x_j \rangle \rangle$$

und schreibt die Dichte in der Form

$$w(\vec{x}) = \frac{\exp \left( -\frac{1}{2} (\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle) \sigma^{-1} (\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle) \right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \sigma}}$$

Die charakteristische Funktion ist

$$G(\vec{k}) = e^{i\vec{k}\langle\vec{x}\rangle - \frac{1}{2}\vec{k}\sigma\vec{k}}$$

Alle Momente kann man durch die Elemente der Kovarianzmatrix  $\sigma$  darstellen (siehe Aufgabe 1.5).

## 1.2.2 Summe der Zufallsvariablen, Zentraler Grenzsatz

Finden wir die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe von zwei Zufallsvariablen  $z = x + y$ :

$$w(z) = \langle \delta(z - x - y) \rangle = \int \delta(z - x - y) w(x, y) dx dy = \int w(z - y, y) dy$$

Wenn die Variablen unabhängig sind, dann erhalten wir die Faltung

$$w(z) = \int w_x(z - y) w_y(y) dy$$

Für Mittelwerte gilt immer

$$\langle z \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$$

Für Varianz gilt

$$\langle \langle z^2 \rangle \rangle = \langle \langle x^2 \rangle \rangle + \langle \langle y^2 \rangle \rangle$$

nur wenn die Zufallsvariablen unkorreliert sind,  $\rho = 0$ . Für unabhängige  $x$  und  $y$  gilt

$$G_z(k) = G_x(k)G_y(k)$$

Wir betrachten eine Summe von  $n$  unabhängigen Variablen mit den Mittelwert Null

$$y = x_1 + \dots + x_n$$

Die Varianz ist  $\langle\langle y^2 \rangle\rangle = n\langle\langle x^2 \rangle\rangle$ , deshalb normieren wir  $y$  mit  $\sqrt{n}$ . Dann haben wir

$$y = \frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \quad G_y(k) = [G_x(\frac{k}{\sqrt{n}})]^n$$

Wir setzen jetzt

$$G_x(k) = e^{-\frac{1}{2}\langle\langle x^2 \rangle\rangle k^2 - \frac{ik^3}{6}\langle\langle x^3 \rangle\rangle + \dots}$$

ein und erhalten

$$G_y(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2\langle\langle x^2 \rangle\rangle - \frac{ik^3}{6}\langle\langle x^3 \rangle\rangle n^{-1/2}} \approx e^{-\frac{1}{2}k^2\langle\langle x^2 \rangle\rangle}$$

Das ergibt die Gausssche Verteilung für die Summe.

Bemerkungen:

- Die Variablen  $x_i$  können auch verschiedene Verteilungen haben
- Die Variablen  $x_i$  können auch abhängig sein, nur die Abhängigkeit muss schwach sein.

### 1.2.3 Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Betrachten wir eine Summe von unabhängigen gleich verteilten Zufallsvariablen

$$s = x_1 + \dots + x_n$$

Wenn die Größe  $s$  nach der Normierung  $s/c_n$  die selbe Verteilung hat wie  $x$ , dann heisst diese Verteilung stabil. Man kann überlegen, dass der Normierungskoeffizient ein Potenz von  $n$  sein muss:  $c_n = n^{1/\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ . Man kann auch äquivalent formulieren, dass  $r^{1/\alpha}x_1 + t^{1/\alpha}x_2$  und  $(r+t)^{1/\alpha}x$  die selbe Verteilung haben.

Die Gauss-Verteilung ist die einzige stabile Verteilung mit einer endlichen Varianz, hier ist  $\alpha = 2$ .

**Beispiele.**

Die Cauchy-Verteilung  $w(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$  hat die charakteristische Funktion  $e^{-\lambda|k|}$ . Diese Verteilung ist stabil mit  $\alpha = 1$ :  $[e^{-\lambda|\frac{k}{n}|}]^n = e^{-\lambda|k|}$ .

Die Holzmark-Verteilung. Welche Gravitationskraft erzeugt ein Sternsystem? Nehmen wir ein Sternsystem mit der Dichte  $\lambda$  und betrachten die  $x$ -Komponente der Kraft im Punkt O. Diese Komponente ist eine Zufallsvariable  $X_\lambda$ . Weil die Gravitationskräfte sich addieren,  $X_s + X_t$  und  $X_{s+t}$  haben die selbe Verteilung. Sei  $X_1$  die Zufallsvariable im Falle der Dichte 1. Bei Dichte  $t$  alle Abstände verkleinern sich um Faktor  $t^{1/3}$ , und die Kraft vergrößert sich um Faktor  $t^{2/3}$ . Deshalb haben  $t^{2/3}X_1$  und  $X_t$  die selbe Verteilung. Wir erhalten die Gleichung

$$s^{2/3}X_1 + t^{2/3}X_2 \stackrel{d}{=} (s+t)^{2/3}X$$

Das bedeutet, dass die Kraft die stabile Verteilung mit  $\alpha = 3/2$  hat.

## 1.2.4 Bemerkungen zum numerischen Verfahren

Die Berechnung von Mittelwerten etc. durch die gegebene Anzahl von Zufallsvariablen erfolgt durch

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{N}(f(x_1) + \dots + f(x_N))$$

Der Mittelwert ist  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_k$ , der 2. Kumulant ist  $\kappa_2 = \frac{1}{N-1} \sum_1^N (x_k - \bar{x})^2$ .

Um die Verteilungsdichte zu bestimmen, berechnet man oft die Histogramm. Viel einfacher (und auch ohne willkürlichen Verteilung in Bins) ist die Berechnung der Verteilungsfunktion  $F_n(x)$ , die an jedem Punkt  $x_k$  die Stufe  $\frac{1}{N}$  hat. Solche Funktion lässt sich darüberhinaus mit der theoretischen Verteilung vergleichen (sogenannte Kolmogorov-Smirnov-Statistik).

# Kapitel 2

## Zufallsprozesse

### 2.1 Dichte, Momente, Stationarität, Ergodizität

Eine Zufallsvariable, die von einem kontinuierlichen Parameter  $t$  abhängig ist, nennen wir Zufallsprozess. Der Parameter  $t$  wird als Zeit interpretiert.

Die einfachste Charakteristik von  $x(t)$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w_1(x, t)$ , die im Allgemeinen von der Zeit abhängig ist. Diese Dichte sagt aber nichts über Wahrscheinlichkeiten zu verschiedenen Zeitpunkten aus. Hier ist die zweidimensionale Dichte  $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$  nötig. Fortgesetzt, erhalten wir eine Hierarchie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ . Diese Hierarchie muss die folgende Bedingungen erfüllen:

- Symmetrie gegenüber Vertauschen  $x_i, t_i \leftrightarrow x_j, t_j$ .
- Unterordnung: Die  $k$ -dimensionale Dichte muss aus der  $n$ -dimensionalen durch eine Integration erhältlich sein

$$\begin{aligned} \int w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n) dx_{k+1} \dots dx_n \\ = w_k(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k) \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist nichttrivial, weil bei der Integration über  $x_i$  auch die Abhängigkeit von  $t_i$  verschwinden muss.

Ein Zufallsprozess heißt stationär (im strengen Sinne) wenn alle Wahrscheinlichkeitsdichten sich bei einer Zeitverschiebung nicht ändern:

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau)$$

Das bedeutet u.A., dass die eindimensionale Dichte zeitunabhängig ist, und die zweidimensionale Dichte hängt nur von der Zeitdifferenz ab:

$$w_1(x) \quad w_2(x_1, x_2, t_2 - t_1) \quad w_3(x_1, x_2, x_3, t_2 - t_1, t_3 - t_1)$$

Die Momente definiert man als

$$\begin{aligned} \langle x(t_1)x(t_2)\dots x(t_n) \rangle &= M_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= \int x_1 x_2 \dots x_n w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Um ein Moment  $n$ -ter Ordnung zu berechnen, braucht man die  $n$ -dimensionale Dichte. Für stationäre Prozesse ist der Mittelwert von der Zeit unabhängig. Das zweite Moment hängt nur von der Zeitdifferenz ab:

$$K(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = K(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$$

Die Autokorrelationsfunktion wird als zentrales Moment zweiter Ordnung definiert

$$C(\tau) = \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t + \tau) - \langle x \rangle) \rangle = \langle \langle x(t)x(t + \tau) \rangle \rangle$$

Offensichtlich ist  $C(0) = \langle \langle x^2 \rangle \rangle$  die Varianz des Prozesses.

Die Theorie stochastischen Prozesse, die nur die Momente 1. und 2. Ordnung betrachtet, heisst Korrelationstheorie. Entsprechend nennt man die Prozesse, bei denen der Mittelwert ist zeitunabhängig und die Autokorrelation nur von Zeitdifferenz abhängig, im weiten Sinne stationär.

### Beispiel

Betrachten wir den Prozess  $x = A \cos(\omega t + \theta)$ , wobei  $A$  und  $\theta$  Zufallsvariablen sind.

Sei nur die Amplitude  $A$  zufällig. Dann

$$\langle x \rangle = \langle A \rangle \cos(\omega t + \theta) \quad \langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \langle A^2 \rangle \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega(t + \tau) + \theta)$$

Die  $t$ -Abhängigkeit hier verschwindet nur wenn  $\langle A \rangle = \langle A^2 \rangle = 0$ .

Seien nun die Phase und die Amplitude zufällig und unabhängig. Dann

$$\langle x \rangle = \langle A \rangle (\cos \omega t \langle \cos \theta \rangle - \sin \omega t \langle \sin \theta \rangle)$$

Die  $t$ -Abhängigkeit hier verschwindet nur wenn  $\langle \cos \theta \rangle = \langle \sin \theta \rangle = 0$ , d.h. wenn  $w(\theta)$  keine 1. Fourier-Harmonische hat. Das 2. Moment ergibt

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \langle A^2 \rangle \langle \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \omega \tau + \theta) \rangle = \frac{\langle A^2 \rangle}{2} [\langle \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\theta) \rangle + \cos \omega \tau]$$

1. Term verschwindet, wenn die Dichte  $w(\theta)$  keine 2. Fourier-Harmonische hat.

Weiterhin kann man feststellen, dass der Prozess nur dann im strengen Sinne stationär wird, wenn die Phase gleichverteilt ist

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ergodizität bedeutet, dass die Ensemble-Mittelung durch die Zeit-Mittelung ersetzt werden kann

$$\langle f(x) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x(t)) dt$$

Hier muss man die Gleichung “mit Wahrscheinlichkeit 1” verstehen. Analog kann man auch die 2. Momente berechnen

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

**Beispiel** Für den Prozess  $x = A \cos(\omega t + \theta)$  berechnen wir die Varianz ( $w(\theta) = 1/2\pi$ ):

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\langle A^2 \rangle}{2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{A^2}{2}$$

Wir sehen, dass die Ergodizität ist nur bei  $w(A) = \delta(A - A_0)$  erfüllt.

Statt eine charakteristische Funktion beschreibt man einen Zufallsprozess mit dem charakteristischen Funktional. Für eine  $n$ -dimensionale Verteilung gilt

$$G(k_1, k_2, \dots, k_n) = \langle e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} \rangle$$

Für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich eine Funktion  $k(t)$ :

$$G[k(t)] = \langle e^{i \int k(t)x(t) dt} \rangle$$

## 2.2 Spektrale Eigenschaften

Hier betrachten wir die Eigenschaften der Fourier-Transformation des Zufallsprozesses  $x(t)$ . Wir schreiben formal

$$x(t) = \int e^{i\omega t} s(\omega) d\omega$$

und fragen nach den statistischen Eigenschaften von  $s(\omega)$ .

Betrachten wir zuerst ein einfacheres Problem: welche Eigenschaften müssen die spektralen Komponenten  $s(\omega)$  haben, um einen stationären Prozess  $x(t)$  zu erzeugen? Der Einfachheit halber schreiben wir die Summe zweier Harmonischen

$$x(t) = s_1 e^{i\omega_1 t} + s_2 e^{i\omega_2 t} + s_1^* e^{-i\omega_1 t} + s_2^* e^{-i\omega_2 t}$$

Der Mittelwert

$$\langle x \rangle = \langle s_1 \rangle e^{i\omega_1 t} + \dots$$

wird nur dann zeitunabhängig, wenn  $\langle s_i \rangle = 0$ . Die Korrelationsfunktion ist

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \langle s_1^2 \rangle e^{i2\omega_1 t + i\omega_1 \tau} + \langle s_1 s_2 \rangle e^{i(\omega_1 + \omega_2)t + i\omega_2 \tau} + \langle s_1 s_1^* \rangle e^{-i\omega_1 \tau} + \dots$$

Für der Stationarität brauchen wir

$$\langle s_i^2 \rangle = \langle s_i s_j \rangle = \langle s_i s_j^* \rangle = 0 \quad \langle s_i s_i^* \rangle = \langle |s_i|^2 \rangle \neq 0$$

Diese Eigenschaften bedeuten, dass die Spektralkomponenten des stationären Zufallsprozesses nicht korreliert sind und den Mittelwert Null haben. Es kann gezeigt werden, dass die Phase gleichmäßig verteilt ist.

Wir schreiben jetzt die allgemeine Formel

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} s(\omega) d\omega$$

und berechnen die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} s(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(t+\tau)} s(\nu) d\nu \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle s(\omega)s(\nu) \rangle e^{i(\omega+\nu)t + i\nu\tau} d\omega d\nu \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass  $\langle s(\omega)s(\nu) \rangle$  nur bei  $\nu = -\omega$  nicht Null ist. Wir schreiben deshalb

$$\langle s(\omega)s(\nu) \rangle = S(\omega)\delta(\omega + \nu)$$

und erhalten

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu$$

Die Größe  $S(\omega)$  heisst Leistungsspektrum. Das Spektrum ist die Fourier-Transformation der Korrelationsfunktion (Wiener-Khintschin-Satz):

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

Betrachten wir den Leistungsspektrum näher. Da die Funktion  $x(t)$  stationär ist, existiert ihre Fourier-Transformation nicht. Deshalb betrachten wir ein Integral über endliche Zeit

$$s_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Entsprechend dem zentralen Grenzsatz erwarten wir, dass für grosse  $T$   $s_t(\omega) \sim \sqrt{T}$ . Deshalb berechnen wir

$$\frac{|s_t(\omega)|^2}{T} = \frac{1}{T4\pi^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t')e^{-i\omega(t-t')} dt dt'$$

Diese Grösse hat keinen Grenzwert bei  $T \rightarrow \infty$ . Deshalb mitteln wir

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle |s_T(\omega)|^2 \rangle}{T}$$

Wir zeigen jetzt, dass  $S(\omega)$  genau das schon eingeführte Leistungsspektrum ist.

$$\begin{aligned} S_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \langle x(t)x(t') \rangle e^{-i\omega(t-t')} dt dt' \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} K(t-t') e^{-i\omega(t-t')} dt dt' \end{aligned}$$

[hier führen wir neue Variablen  $\tau = t - t'$ ,  $\xi = t$  bzw.  $\tau = t - t'$ ,  $\xi = t'$  ein.]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi T} \left[ \int_0^T d\tau \int_{\tau-T/2}^{T/2} d\xi K(\tau) e^{-i\omega\tau} + \int_{-T}^0 d\tau \int_{-T/2}^{\tau+T/2} d\xi K(\tau) e^{-i\omega\tau} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi T} \left[ \int_0^T (T-\tau) K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_{-T}^0 (T+\tau) K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

was der Wiener-Khintschin-Formel entspricht.

Bemerkungen:

1. Das Integral der Leistungsspektrums ist die Varianz

$$K(0) = D = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

2. Die Korrelationsfunktion und das Leistungsspektrum erfüllen die Unbestimmtheitsrelation.
3. Das weisse Rauschen ist ein Prozess mit konstantem Leistungsspektrum  $S(\omega) = S_0$ . Die Korrelationsfunktion lautet

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{-i\omega\tau} = 2\pi S_0 \delta(\tau)$$

Die Varianz ist unendlich.

4. Ein Leistungsspektrum von der Summe zweier nichtkorrelierter Zufallsprozesse ist die Summe von deren Spektren.
5. Wenn der Mittelwert nicht Null ist, dann  $K(\tau) = \langle\langle x(t)x(t+\tau) \rangle\rangle + \langle x \rangle^2$ . Die Fourier-Transformation ergibt  $S = S(\omega) + \langle x \rangle^2 \delta(\omega)$ .
6. Im Allgemeinen beinhaltet  $S(\omega)$  eine diskrete, eine stetige, und eine singular-kontinuierliche Komponente. Das Wiener'sche Lemma sagt, dass die Intensität der diskreten Komponenten zu  $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\tau) d\tau$  gleich ist.

Beispiel: Harmonischer Prozess mit der Amplitudenmodulation.

Solcher Prozess wird durch  $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi)$ , wobei  $A(t)$  ein gegebener Prozess ist und  $\phi$  eine von 0 bis  $2\pi$  gleichverteilte Zufallsvariable ist. Wir schreiben  $A(t) = A_0 + a(t)$  mit  $\langle a \rangle = 0$  und erhalten die Korrelationsfunktion durch einfache Rechnung

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \frac{1}{2} \langle A(t)A(t+\tau) \rangle \cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2} (A_0^2 + K_a(\tau)) \cos \omega_0 \tau$$

Das Leistungsspektrum erhalten wir durch die Fourier-Transformation:

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{8\pi} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2} [S_a(\omega - \omega_0) + S_a(\omega + \omega_0)]$$

Beispiel: Harmonischer Prozess mit der Phasenmodulation.

Hier  $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi - \eta(t))$ , wobei  $\eta(t)$  ein stationärer Prozess ist und  $\phi$  eine von 0 bis  $2\pi$  gleichverteilte Zufallsvariable ist. Die Korrelationsfunktion lautet

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \frac{A_0^2}{2} \langle \cos(\omega_0 \tau - \eta(t) + \eta(t+\tau)) \rangle$$

Wenn die zweipunktliche charakteristische Funktion von  $\eta(t)$  als

$$G(k_1, k_2, \tau) = \langle e^{ik_1 \eta(t) + ik_2 \eta(t+\tau)} \rangle$$

definiert ist, dann

$$\langle e^{i\omega_0 \tau + i\eta(t+\tau) - i\eta(t)} \rangle = e^{i\omega_0 \tau} G(-1, 1, \tau)$$

Falls  $\eta$  gaussisch ist, dann

$$G(k_1, k_2) = e^{\langle \eta \rangle (k_1 + k_2) - \frac{\sigma^2}{2} (k_1^2 + 2R(\tau)k_1 k_2 + k_2^2)}$$

wobei  $R(\tau)$  die normierte Korrelationsfunktion von  $\eta$  ist und  $\sigma^2$  die Varianz von  $\eta$  ist. Als Ergebnis erhalten wir die Korrelationsfunktion

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-\sigma^2(1-R(\tau))}$$

Für  $t \rightarrow \infty$   $R(\tau) \rightarrow 0$  und  $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle \rightarrow \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-\sigma^2}$ , das ist die Amplitude der Delta-Funktion im Spektrum.

### 2.2.1 Karhunen-Loève-Zerlegung

Die Korrelationsfunktion ist positiv definit. Dies zu zeigen, schreiben wir für beliebige Funktion  $f$

$$\left\langle \left[ \int_0^T f(t)x(t)dt \right]^2 \right\rangle \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle \int_0^T f(u)x(u)du \int_0^T f(v)x(v)dv \right\rangle = \int \int K(u,v)f(u)f(v)dudv \geq 0$$

Das ist genau die Definition einer positiv definiten Funktion. Daraus folgt, dass der Operator, der mit Hilfe dieser Funktion definiert wird

$$\psi(u) = \int_0^T K(u,v)\phi(v)dv$$

auch positiv definit ist, und hat deshalb die positive Eigenwerte und die Eigenfunktionen, die eine Basis bilden. Die Eigenwerte  $\lambda$  und die Eigenfunktionen  $\phi$  erfüllen

$$\int_0^T K(u,v)\phi(v)dv = \lambda\phi(u)$$

Die Eigenfunktionen sind orthonormiert  $\int_0^T \phi_k(t)\phi_j(t)dt = \delta_{ij}$ . Wir können die Korrelationsfunktion in dieser Basis entwickeln:

$$K(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(u)\phi_k(v)$$

Wir können auch eine beliebige Realisierung des Zufallsprozesses  $x(t)$ ,  $0 < t < T$  in dieser Basis entwickeln (da die Konvergenz noch nicht klar ist, schreiben wir zuerst die endliche Entwicklung):

$$x_N(t) = \sum_1^N \xi_k \sqrt{\lambda_k} \phi_k(t) \quad \xi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T x(t)\phi_k(t)dt$$

Wir zeigen zuerst, dass die Entwicklungskoeffizienten  $\xi_k$  nicht korreliert sind:

$$\langle \xi_k \xi_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_m}} \left\langle \int_0^T x(u)\phi_k(u)du \int_0^T x(v)\phi_m(v)dv \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_m}} \int_0^T \int_0^T dudv K(u,v)\phi_k(u)\phi_m(v) = \delta_{km}$$

Zunächst zeigen wir, dass die Entwicklung in Sinne des mittleres Quadrates konvergiert:

$$\langle (x(t) - x_N(t))^2 \rangle = Var(x) + 2 \langle x x_N \rangle - \langle x_N^2 \rangle$$

$$\langle xx_N \rangle = \left\langle x(t) \sum_1^N \phi_k(t) \sqrt{\lambda_k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T x(u) \phi_k(u) du \right\rangle = \sum_1^N \phi_k(t) \int_0^T K(t, u) \phi_k(u) du = \sum_1^N \lambda_k \phi_k^2$$

Auch  $\langle x_N^2 \rangle = \sum_1^N \lambda_k \phi_k^2$ . Deshalb

$$\langle (x(t) - x_N(t))^2 \rangle = K(t, t) - \sum_1^N \lambda_k \phi_k^2 \rightarrow 0$$

Die Zerlegung des Zufallsprozesses in der Basis der Korrelationsfunktion heisst Karhunen-Loève-Decomposition oder auch "principal component analysis". Die Haupteigenschaft ist, dass die Komponente der Zerlegung nicht korreliert sind, d.h. wir zerlegen die Realisierung in der nicht-korrelierten Komponenten.

Am einfachsten ist die KLZ in diskreter Zeit, dann  $K$  ist die Matrix,  $\phi$  und  $\lambda$  die Eigenvektoren und Eigenwerte. Zwei einfache Fälle sind leicht zu behandeln. Wenn der Prozess delta-korreliert ist, sind alle Eigenwerte 1 und die Eigenvektoren sind (100...), 010... etc. Deshalb ist die KLZ einfach Zerlegung in der Werte von  $x(t_i)$ . Wenn die Korrelationen auf dem Interval  $0, T$  nicht abnehmen, dann  $K_{ij} = 1$ . Diese Matrix hat ein Eigenvektor (111...1) mit der Eigenwert 1, alle andere Eigenwerte sind Null. Die Zerlegung besteht aus einem Glied – dem Wert des Prozesses auf dem interval  $0, T$ .

## 2.2.2 Transformation Zufallsprozessen in linearen Systemen

Lineare Systeme transformieren das Eingangssignal  $x(t)$  zum Ausgangssignal  $y(t)$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

In Systemen mit konstanten Parametern  $h(t, \tau) = h(t - \tau)$  und

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

Für das Spektrum erhalten wir

$$s_y(\omega) = H(\omega) s_x(\omega)$$

wobei

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

Das Spektrum eines Zufallsprozesses ist  $\sim |s(\omega)|^2$ , deshalb

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Beispiel 1.

Niedrigfrequenzfilter.

$$\tau \dot{y} + y = x$$

In Fourier-Form

$$s_y(\omega) = \frac{s_x(\omega)}{1 + i\omega\tau}$$

Für das Leistungsspektrum erhalten wir

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Wenn das Spektrum von  $x$  breit ist, kann der Prozess  $x$  mit dem weissen Rauschen approximiert werden:  $S_y(\omega) = A/(1 + \omega^2\tau^2)$ . Die Autokorrelationsfunktion von  $y$  ist dann  $C(t) = e^{-|t|/\tau}$ .

Beispiel 2.

Die Zeitableitung:  $y = \dot{x}$ . Hier  $H(\omega) = i\omega$  und  $S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$ . Die Korrelationsfunktion der Ableitung ist  $K_y(\tau) = -K_x''(\tau)$ . Der Mittelwert der Ableitung ist Null.

Beispiel 3.

Das Integral:  $\dot{y} = x$ ,  $H(\omega) = 1/i\omega$ ,  $S_y(\omega) = S_x(\omega)/\omega^2$ . Wenn  $S_x(0) \neq 0$ , dann divergiert das Integral  $\int S_y(\omega) d\omega$  und die Varianz von  $y$  ist unendlich. Dieser nicht-stationärer Prozess ist ein Diffusionsprozess.

### 2.2.3 Diffusion auf langen Zeitskalen

Die Diffusion wird durch die Diffusionskonstante charakterisiert, die durch die Formel

$$\langle y(t)^2 \rangle \propto_{t \rightarrow \infty} Dt$$

definiert wird. Wir berechnen die Varianz  $\langle y(t)^2 \rangle$  ähnlich zur Berechnung des Spektrums:

$$\begin{aligned} \langle y(t)^2 \rangle &= \left\langle \int_0^t \int_0^t x(t')x(t'') dt' dt'' \right\rangle = \int_0^t \int_0^t K(t' - t'') dt' dt'' \\ &= t \int_{-t}^t \left(1 - \frac{|\tau|}{t}\right) K(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Falls das Integral konvergiert, erhalten wir die Green-Kubo-Formel

$$\langle y(t)^2 \rangle = tD \quad D = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau$$

für die Diffusionskonstante. Anders ausgedrückt

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = 2\pi S(0)$$

ist die Diffusionskonstante gleich die Spektrumkomponente für Frequenz Null.

Wenn die Korrelationsfunktion sehr langsam abnimmt  $K(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$ ,  $\gamma < 1$ , erhalten wir

$$\frac{\langle y(t)^2 \rangle}{t} \sim 2 \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \tau^{-\gamma} \sim t^{1-\gamma}$$

oder

$$\langle y(t)^2 \rangle \sim t^{2-\gamma}$$

Solche Diffusion heisst anomale Diffusion. Ein andere Variante der anomalen Diffusion tritt ein, wenn die einzigen Verteilungen stabile Verteilungen sind, z.B. Cauchy-Verteilung.

Beispiel. Harmonischer Oszillator mit der Frequenzmodulation.

Der Prozess wird durch  $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi(t))$  beschrieben, wobei die Phase  $\phi$  die Gleichung  $\dot{\phi} = \xi(t)$  erfüllt. Hier ist  $\xi$  der Zufallsteil der Frequenz. Die Phase ist das Integral über der Frequenz, deshalb stellt die Phase ein Diffusionsprozess dar. Die Korrelationsfunktion berechnen wir aus

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \frac{A_0^2}{2} \langle \cos(\omega_0 \tau + \phi(t+\tau) - \phi(t)) \rangle$$

Um weiter rechnen zu können, nehmen wir an, dass die Phase gaussisch verteilt ist und die Diffusion von der Zeit  $t = 0$  gilt (das bedeutet, dass  $\xi$  delta-korreliert ist). Dann

$$\langle \cos(\phi(t+\tau) - \phi(t)) \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} \langle (\phi(t+\tau) - \phi(t))^2 \rangle\right] = \exp\left[-\frac{1}{2} D|\tau|\right]$$

Das ergibt

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-\frac{1}{2} D|\tau|}$$

Das Spektrum ist

$$S(\omega) = \frac{A_0^2 D}{8\pi} \left[ \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + D^2/4} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)^2 + D^2/4} \right]$$

Dieses Spektrum, im Gegensatz zum Spektrum bei der Amplituden- bzw. Phasenmodulation beinhaltet keine diskrete Komponente.

## 2.2.4 Kreuzkorrelation und Kreuzspektrum

Die Kreuzkorrelationsfunktion zweier stationärer Prozesse  $x(t)$  und  $y(t)$  hängt von der Zeitdifferenz ab:

$$K_{xy}(t, t') = K_{xy}(t - t') = \langle x(t)y(t') \rangle$$

Es ist zu bemerken, dass  $K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau)$  aber  $K_{xy}(\tau) \neq K_{xy}(-\tau)$ . Man kann zeigen, dass  $|K_{xy}(\tau)|^2 \leq \sqrt{K_x(0)K_y(0)}$ . Das Verhältnis  $C_{xy}(\tau) = K_{xy}(\tau)/\sqrt{K_x(0)K_y(0)}$  wird die normierte Kreuzkorrelationsfunktion genannt.

Betrachten wir jetzt die Fourier-Transformation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} s_x(\omega) d\omega \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} s_y(\omega) d\omega$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion ist

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\nu e^{i(\omega+\nu)t - i\nu\tau} \langle s_x(\omega)s_y(\nu) \rangle$$

Wir führen das Kreuzspektrum ein:

$$\langle s_x(\omega)s_y(\nu) \rangle = S_{xy}(\omega)\delta(\omega + \nu)$$

oder

$$\langle s_x(\omega)s_y^*(\nu) \rangle = S_{xy}(\omega)\delta(\omega - \nu)$$

und erhalten

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}(\omega) d\omega$$

Das Kreuzspektrum ist komplex und erfüllt

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega)$$

Beispiel: Finden wir die Korrelationseigenschaften des Zufallsprozesses und deren Zeitableitung. Wenn  $y = \dot{x}$ , dann  $S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$ . Deshalb

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= -\frac{\partial^2 K_x(\tau)}{\partial\tau^2} \end{aligned}$$

wobei die letzte Formel durch die partielle Integration erhalten werden kann.

Für die Kreuzkorrelation erhalten wir

$$\begin{aligned} K_{x\dot{x}}(\tau) &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} s_x(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu t + i\nu\tau} - i\nu s_y(\nu) d\nu \right\rangle \\ &= \int -i\nu e^{i\nu\tau} S_x(\nu) d\nu = -\frac{\partial}{\partial\tau} K_x(\tau) \end{aligned}$$

## 2.2.5 Impulsprozesse

Wir betrachten hier die Prozesse, die die Form von Reihe von Impulsen zu den Zeiten  $t_1, t_2, \dots$  haben. Sei  $f(\tau)$  die Wehrscheinlichkeitsdichte des Abstandes zwischen Impulsen. Dann  $\mathcal{F}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(u) du$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand grösser als  $\tau$  ist.

Sei es bekannt, dass ein Impuls zur Zeit  $\tau$  noch nicht aufgetreten ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Impuls während des Intervalls  $\tau + \Delta\tau$  erscheint,

$$\phi(\tau)\Delta\tau = \frac{\mathcal{F}(\tau + \Delta\tau) - \mathcal{F}(\tau)}{\mathcal{F}(\tau)} = -\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}}\Delta\tau$$

Nehmen wir, dass diese Wahrscheinlichkeit konstant ist  $\phi(\tau) = \lambda$ . Dann

$$\mathcal{F}(\tau) = e^{-\lambda\tau} \quad f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$$

Der Prozess, bei welchem die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Impulsabständen exponentiell verteilt ist, heisst Poisson-Prozess. Der kann durch die folgende Eigenschaften definiert werden:

- 1) Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis im Intervall  $(t, t + \Delta t)$  ist  $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ .
- 2) Diese Wahrscheinlichkeit ist von der Vergangenheit  $t' < t$  unabhängig
- 3) Die Wahrscheinlichkeit, zwei Ereignisse im Intervall  $(t, t + \Delta t)$  zu haben, ist  $o(\Delta t)$ .

Man kann zeigen, dass die Zahl von Impulsen auf einem grossen Zeitintervall  $(0, T)$  die Poissonsche Verteilung mit dem Mittelwert  $\lambda T$  erfüllt. Wir teilen das Intervall  $[0, T]$  auf  $k$  Intervalle der Länge  $\Delta t$ . Die Wahrscheinlichkeit, einen Impuls in jedem kleinen Intervall zu haben, ist  $\lambda\Delta t$ . Die Wahrscheinlichkeit,  $m$  solche Ereignisse zu haben, ist die Binomialverteilung

$$\binom{k}{m} (\lambda\Delta t)^m (1 - \lambda\Delta t)^{k-m} = \binom{k}{m} \left(\frac{\lambda t}{k}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)^{k-m}$$

Für  $k \rightarrow \infty$  können wir schreiben

$$\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!} \approx \frac{k^m}{m!}$$

Weiterhin

$$1 - \frac{\lambda t}{k} \approx e^{-\frac{\lambda t}{k}} \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)^{k-m} \approx e^{-\lambda T}$$

so dass letztendlich die Poissonsche Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^m}{m!}$$

entsteht. Hier insbesondere ist der Mittelwert gleich der Varianz:

$$\langle m \rangle = \lambda T = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2$$

**Stationarität** Um ein stationärer Prozess zu erhalten, müssen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erscheinungszeit des ersten Impulses speziell auswählen. Wir nehmen an, dass der Prozess mit einem Impuls zur Zeit  $t = 0$  anfängt, und berechnen die Wahrscheinlichkeit  $w(x)$ , dass wenn wir eine grosse Zeit  $t$  nehmen, das nächste nach  $t$  Impuls kommt nach einem Zeitintervall  $x$ . Dann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $x$  wird genau die gesuchte Verteilung von einem “zufällig gewählten” Zeitpunkt bis zum nächsten Impuls. Sei  $h(t')$  – die Wahrscheinlichkeitsdichte, einen Impuls zur Zeit  $t'$  zu beobachten. Dann

$$w(x) = \int_0^t h(t-u)f(u+x)du$$

(hier wird die Wahrscheinlichkeit vernachlässigt, keinen Impuls während Zeit  $t$  zu beobachten). Wenn  $t \rightarrow \infty$ , strebt die Wahrscheinlichkeit  $h$  gegen  $\frac{1}{\langle \tau \rangle}$ . Deshalb

$$w(x) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \int_0^\infty f(u+x)du = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \int_x^\infty f(u)du$$

Für Poissonischen Prozess aus

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad \int_x^\infty f(u)du = e^{-\lambda x} \quad \langle \tau \rangle = \frac{1}{\lambda}$$

folgt

$$w(x) = \lambda e^{-\lambda x} = f(x)$$

Das kann man als einen Paradox formulieren: die Erwartung eines Ereignis von zufällig gewählten Zeitpunkt ist die selbe wie von vorheriges Ereignis. Die Lösung ist in der Tatsache, dass ein zufällig gewählter Zeitpunkt liegt mit grosser Wahrscheinlichkeit in einem langen Intervall zwischen zwei Ereignissen.

Beispiel: Der Telegraph-Prozess hat die Werte  $\pm 1$ , und die Umschaltungsereignisse bilden einen Poisson-Prozess. Die Wahrscheinlichkeit, im Intervall  $[0, T]$  eine gerade Zahl von Umschaltungen zu haben, ist

$$W_{ger} = e^{-\lambda T} \sum \frac{(\lambda T)^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda T} \cosh \lambda T = \frac{1 + e^{-2\lambda T}}{2}$$

Für eine ungerade Zahl erhalten wir

$$W_{unger} = \frac{1 - e^{-2\lambda T}}{2}$$

Damit ist die Korrelationsfunktion

$$K(T) = \langle x(0)x(T) \rangle = W_{ger} - W_{unger} = e^{-2\lambda T}$$

Beispiel: shot noise. Die Impulssequenz

$$x(t) = \sum h(t - t_j)$$

wobei  $t_j$  ein Poisson-Prozess ist, heisst "shot noise". Berechnen wir die Korrelationsfunktion. Seien im Intervall  $[0, T]$  genau  $n$  Impulse aufgetreten:

$$x(t) = \sum_1^n h(t - t_j)$$

Dann ist die Korrelationsfunktion

$$K_n(\tau) = \left\langle \sum_{j=1}^n h(t - t_j) \sum_{k=1}^n h(t - t_k) \right\rangle = \sum_{j,k} \langle h(t - t_j) h(t - t_k) \rangle$$

Wir teilen diese Summe in  $n$  Terme mit  $j = k$  und  $n^2 - n$  Terme mit  $j \neq k$ :

$$K_n(\tau) = n \langle h(t - t_j) h(t - t_j + \tau) \rangle + (n^2 - n) \langle h(t - t_j) \rangle \langle h(t - t_k + \tau) \rangle$$

Der erste Term wird zum Integral  $\kappa(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t + \tau) dt$ . Der zweite Term ergibt  $H^2$  wobei  $H$  der Mittelwert  $H = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$  ist. Wir können schreiben

$$K_n(\tau) = \frac{n}{T} \kappa(\tau) + \frac{n^2 - n}{T^2} H^2$$

Jetzt müssen wir diese Funktion über die Poisson-Verteilung von  $n$  mitteln. Mit der Berücksichtigung von Formeln  $\langle n \rangle = \lambda T$  und  $\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle$  erhalten wir

$$K(\tau) = \lambda \kappa(\tau) + \lambda^2 H^2$$

Das entsprechende Spektrum lautet

$$S(\omega) = 2\pi \lambda |h(\omega)|^2 + 2\pi \lambda^2 |h(0)|^2 \delta(\omega)$$

# Kapitel 3

## Markov-Prozesse

Ein Markov-Prozess hat die Eigenschaft, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit nur von dem letzten Zeitpunkt abhängig ist:

$$w_{1|n-1}(y_n, t_n | y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}) = w_{1|1}(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1})$$

Der Markov-Prozess wird komplett durch zwei Funktionen

$$w_1(y, t) \quad \text{und} \quad w_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1)$$

gegeben. Z. B.

$$\begin{aligned} w_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= w_2(y_1, t_1; y_2, t_2) w_{1|2}(y_3, t_3 | y_1, t_1; y_2, t_2) = \\ &= w_1(y_1, t_1) w_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) w_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Beispiel: Diskrete deterministische Abbildung  $y_{n+1} = f(y_n)$ . Hier  $w_{1|1} = \delta(y_{n+1} - f(y_n))$  und  $w_2(y_{n+1}, y_n) = w_1(y_n) \delta(y_{n+1} - f(y_n))$ . Für zeitkontinuierliche Systeme  $\dot{y} = f(y)$  braucht man die allgemeine Lösung  $\phi(y_0, t - t_0)$ . Dann

$$w_{1|1}(y, t | y_0, t_0) = \delta(y - \phi(y_0, t - t_0))$$

### 3.1 Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Wir integrieren die Gleichung (3.1) über  $y_2$ :

$$w_2(y_1, t_1; y_3, t_3) = w_1(y_1, t_1) \int dy_2 w_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) w_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1)$$

Jetzt dividieren wir durch  $w_1(y_1, t_1)$  und erhalten die Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$w_{1|1}(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int dy_2 w_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) w_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1)$$

Diese Gleichung wird auch Smoluchovsky-Gleichung genannt. Sie muss für Markov-Prozesse erfüllt sein.

Beispiel: Der Telegraph-Prozess hat die Übergangswahrscheinlichkeit

$$w_{1|1}(y, t|y', t') = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\lambda(t-t')}] \delta(y - y') + \frac{1}{2}[1 - e^{-2\lambda(t-t')}] \delta(y + y')$$

Beispiel: Der Wiener-Prozess

$$w_{1|1}(y, t|y', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t')}} e^{-\frac{(y-y')^2}{2(t-t')}} \quad w_1(y, 0) = \delta(y)$$

Dieser nichtstationärer Prozess beschreibt die Diffusion; die Wahrscheinlichkeitsdichte ist

$$w_1(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$$

Wenn der Markov-Prozess stationär ist, hängt  $w_{1|1}$  nicht von zwei Zeiten ab, sondern von der Zeitdifferenz:

$$w_{1|1}(y_2, t_2|y_1, t_1) = T_\tau(y_2|y_1), \quad \tau = t_2 - t_1$$

Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung kann dann als

$$T_{\tau+\tau'}(y_3|y_1) = \int dy_2 T_{\tau'}(y_2|y_1) T_\tau(y_3|y_2)$$

geschrieben werden. Aus der Symmetrie der zweidimensionalen Verteilung folgt

$$\begin{aligned} w_2(y_1, t_1; y_2, t_2) &= T_\tau(y_2|y_1) w_1(y_1) = \\ &= w_2(y_2, t_2; y_1, t_1) = T_{-\tau}(y_1|y_2) w_1(y_2) \end{aligned}$$

Dies ist keine Detaillierte-Bilanz-Bedingung, da hier die Übergangswahrscheinlichkeit mit der negativen Zeit steht.

Beispiel: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

$$w_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad T_\tau(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2\tau})}} e^{-\frac{(y_2-y_1 e^{-\tau})^2}{2(1-e^{-2\tau})}}$$

Dieser Prozess ist ein markovscher, stationärer und gausscher Prozess. Er ist der einzige Prozess mit solchen Eigenschaften. Die Korrelationsfunktion ist  $K(\tau) = e^{-\tau}$ .

## 3.2 Master-Gleichung

Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung ist eine funktionale Gleichung, die nicht so einfach zu behandeln ist. Im Grenzübergang  $\tau \rightarrow 0$  lässt sich eine Differentialgleichung ableiten, die viel einfacher zu behandeln ist. Zuerst ist zu bemerken, dass  $T_0(y_2|y_1) = \delta(y_2 - y_1)$ . Wir nehmen an, dass für kleine  $\tau'$  die Übergangswahrscheinlichkeit proportional zu  $\tau$  ist:

$$T_{\tau'}(y_2|y_1) = \tau'W(y_2|y_1) + (1 - a_0\tau')\delta(y_2 - y_1) + o(\tau')$$

Hier ist aus Normierungsgründen  $a_0(y_1) = \int W(y_2, y_1) dy_2$ . Die physikalische Bedeutung von  $W(y_2|y_1)$  ist die Übergangswahrscheinlichkeit  $y_1 \rightarrow y_2$  pro Zeiteinheit. Dann setzen wir diesen Ausdruck in der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$T_{\tau'+\tau}(y_3|y_1) = \int dy_2 T_\tau(y_3|y_2) T_{\tau'}(y_2|y_1)$$

ein:

$$\begin{aligned} T_{\tau'+\tau}(y_3|y_1) &= (1 - a_0(y_1)\tau')T_\tau(y_3|y_1) + \tau' \int dy_2 W(y_2|y_1) T_\tau(y_3|y_2) \\ \frac{T_{\tau'+\tau}(y_3|y_1) - T_\tau(y_3|y_1)}{\tau'} &= \int dy_2 W(y_2|y_1) T_\tau(y_3|y_2) - a_0(y_1) T_\tau(y_3|y_1) \end{aligned}$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Normierung als

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau(y_3|y_1) = \int dy_2 W(y_2|y_1) T_\tau(y_3|y_2) - \int dy_2 W(y_2, y_1) T_\tau(y_3|y_1)$$

umschreiben. Diese Gleichung wird Master-Gleichung benannt. Oft wird sie für  $P(y, t) = T_t(y|y_0)$  geschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \int dy [W(y|y')P(y') - W(y'|y)P(y)]$$

Dazu gehört die Anfangsbedingung  $P(y, 0) = \delta(y - y_0)$ .

Im diskreten Fall schreibt man

$$\frac{dp_n}{dt} = \sum_n [W_{nn'} p_{n'}(t) - W_{n'n} p_n(t)]$$

Die Master-Gleichung stellt eine Wahrscheinlichkeitsbilanz dar.

Diese Gleichung ist für die Übergangswahrscheinlichkeit  $P(y, t) = T_t(y|0)$  aufgestellt, aber die gleiche Gleichung kann man auch für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(y, t)$  schreiben. Weil

$$w(y, t) = \int P(y, t) w(y_0, 0) dy_0$$

gilt, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} = \int \frac{\partial}{\partial t} P w(y_0, 0) dy_0 = \int dy [W(y|y')w(y') - W(y'|y)w(y)]$$

mit der Anfangsbedingung  $w(y, 0)$ .

Beispiel. Eine Glühlampe kann einwandfrei (Zustand 0), mangelhaft (Zustand 1) und kaputt (Zustand 2) sein. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\text{für 0: } W_{10} \quad W_{20} \quad 1 - W_{10} - W_{20} \quad \text{für 1: } W_{21} \quad W_{11} = 1 - W_{21} \quad \text{für 2: } W_{22} = 1$$

Die Master-Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \frac{dw_0}{dt} &= -(W_{10} + W_{20})w_0 \\ \frac{dw_1}{dt} &= W_{10}w_0 - W_{21}w_1 \\ \frac{dw_2}{dt} &= W_{20}w_0 + W_{21}w_1 \end{aligned}$$

Wenn zur Zeit  $t = 0$   $w_0 = 1, w_1 = w_2 = 0$ , dann

$$w_0 = e^{-(W_{10}+W_{20})t} \frac{dw_1}{dt} = -W_{21}w_1 + W_{10}e^{-(W_{10}+W_{20})t}$$

und

$$w_1 = \frac{W_{10}}{W_{10} + W_{20} - W_{21}} (e^{-W_{21}t} - e^{-(W_{10}+W_{20})t})$$

$$w_2 = \frac{W_{20}}{W_{10} + W_{20}} (1 - e^{-(W_{10}+W_{20})t}) + \frac{W_{10}}{W_{10} + W_{20} - W_{21}} (1 - e^{-W_{21}t}) - \frac{W_{21}W_{10}}{W_{10} + W_{20} - W_{21}} (1 - e^{-(W_{10}+W_{20})t})$$

Für  $t \rightarrow \infty$  strebt die Wahrscheinlichkeit  $w_2$  gegen 1. Dieser Zustand ist ein absorbierender Zustand.

### 3.3 Markov-Ketten

Eine Markov-Kette ist ein Prozess mit diskreten Zuständen und diskreter Zeit. Sie wird durch die Matrix  $Q_{nn'}$  gegeben, die die Übergänge von  $n'$  zu  $n$  beschreibt:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \dots \\ q_{10} & q_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die Matrix heisst stochastische Matrix, wenn

- alle Elemente nicht-negativ sind,
- die Summe von Elementen in jede Spalte gleich 1 ist.

Jede stochastische Matrix definiert eine Markov-Kette.

Beispiel: ein Irrweg mit Wahrscheinlichkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  nach rechts und nach links zu springen wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \dots & 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 - \alpha - \beta & \beta & \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha - \beta & \beta \\ \dots & & & \dots \end{pmatrix}$$

gegeben. Hier sind zwei Typen von Randbedingungen interessant:

1) reflektierender Rand

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta & \\ \alpha & 1 - \alpha - \beta & \beta \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha - \beta \quad \beta \end{pmatrix}$$

2) absorbierender Rand

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & \\ 0 & 1 - \alpha - \beta & \beta \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha - \beta \quad \beta \end{pmatrix}$$

Die Zustände einer Markov-Kette können folgendermaßen klassifiziert werden. Sei der Anfangszustand der Kette  $j$ . Der Zustand  $j$  heisst

Rekurrent, wenn die Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 in den Zustand  $j$  zurückkehrt. Die Zeit der ersten Rückkehr heisst Rückkehrzeit.

Positiv-rekurrent, wenn die mittlere Rückkehrzeit endlich ist.

Null-rekurrent, wenn die mittlere Rückkehrzeit unendlich ist.

Transient, wenn die gesamte Wahrscheinlichkeit in den Zustand  $j$  zurückzukehren kleiner als 1 ist.

Periodisch, wenn die Kette kann in den Zustand  $j$  nur zur Zeiten  $t, 2t, 3t, \dots$  zurückkehren.

Ergodisch, wenn er nicht periodisch und positiv-rekurrent ist.

Beispiel (Polya-Satz): Der symmetrische Irrweg ist in 1 und 2 Dimensionen nullrekurrent. In 3 Dimensionen ist jeder Zustand transient: die Rückkehrwahrscheinlichkeit ist 0.35, die mittlere Zahl von Rühkkehren ist 0.53. Ein nichtsymmetrischer Irrweg ist transient in jeder Dimension.

Wir bestimmen jetzt einige quantitative Eigenschaften der Markov-Ketten. Sei  $f_{kj}^{(n)}$  die Wahrscheinlichkeit, den ersten Übergang von  $j$  zu  $k$  nach  $n$  Zeitschritten zu haben. Hier  $f_{kj}^{(1)} = q_{kj}$ .  $f_j = \sum_n f_{jj}^{(n)}$  ist die Wahrscheinlichkeit, irgendwann zu  $j$  zurückzukehren. Der Zustand ist rekurrent, wenn  $f_j = 1$  und transient, wenn  $f_j < 1$ . Die mittlere Rückkehrzeit ist  $\langle t_j \rangle = \sum_n n f_{jj}^{(n)}$  (analog kann man die mittlere Übergangszeit  $\langle t_{kj} \rangle = \sum_n n f_{kj}^{(n)}$  definieren).

Wir führen die Wahrscheinlichkeit  $p_{jj}^{(n)}$ , im Zustand  $j$  nach  $n$  Zeitschritten zu sein, ein. Die charakteristischen Funktionen werden als

$$F_{jj}(s) = \sum_n f_{jj}^{(n)} s^n \quad P_{jj}(s) = \sum_n p_{jj}^{(n)} s^n$$

geschrieben. Man kann überlegen, dass die erste Rückkehr nach 1,2...n-1 Schritten sich gegenseitig ausschliessen. Deshalb

$$p_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + f_{jj}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} + \dots + f_{jj}^{(n)}$$

Jetzt multiplizieren wir diesen Ausdruck mit  $s^n$  und erhalten

$$\begin{aligned} P_{jj}(s) &= \sum_n p_{jj}^{(n)} s^n = \sum_n f_{jj}^{(1)} s p_{jj}^{(n-1)} s^{n-1} + f_{jj}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} s^{n-2} + \dots + f_{jj}^{(n)} s^n \\ &= F_{jj}(s) + F_{jj}(s) P_{jj}(s) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$P_{jj}(s) = \frac{F_{jj}(s)}{1 - F_{jj}(s)} \quad F_{jj}(s) = \frac{P_{jj}(s)}{1 + P_{jj}(s)}$$

Die charakteristische Funktionen lassen die eingeführte Größen berechnen:

$$f_j = F_{jj}(1) \quad \langle t_j \rangle = F'_{jj}(1)$$

Man sieht, dass  $f_j < 1$ , wenn  $P_{jj}(1)$  endlich ist, und  $f_j = 1$ , wenn  $P_{jj}(1) = \sum_n p_{jj}^{(n)} = \infty$ . Es gilt auch, dass der Zustand  $j$  ergodisch ist, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \text{const}$ , und  $1/\langle t_j \rangle = p_{jj}^{(\infty)}$ .

Die Markov-Ketten lassen sich folgendermassen klassifizieren. Die Ketten können zerlegbar und nicht zerlegbar (wenn aus jedem Zustand jeder anderer Zustand erreichbar ist) sein. Die Kette

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

ist zerlegbar (man kann 1 aus 0 nicht erreichen) und die Kette

$$\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}$$

ist nicht zerlegbar. In einer nicht zerlegbaren Kette sind alle Zustände von einem Typ.

Wir finden die Eigenwerte der stochastischen Matrix  $Q$ . Da die Summe von Elementen jeder Spalte 1 ist, ist der Vektor  $\langle 1|$  der linke Eigenvektor:  $\langle 1|Q = \langle 1|$ . Daraus folgt, dass die Matrix  $Q$  hat Eigenwert 1: Wenn wir die Gleichung

$$Q|a\rangle = \lambda|a\rangle$$

mit  $\langle 1|$  multiplizieren, erhalten wir  $\langle 1|a\rangle = \lambda\langle 1|a\rangle$ , was ergibt: Entweder  $\lambda_0 = 1$  oder  $\langle 1|a\rangle = 0$ . Der Satz von Perron und Frobenius sagt, dass alle Komponente des Eigenvektors  $|a\rangle$  positive sind, und alle andere Eigenwerte kleiner als 1 sind  $|\lambda_n| \leq \lambda_0 = 1$ . Das bedeutet, dass für  $t \rightarrow \infty$   $Q^t \rightarrow |a_0\rangle\langle 1|$ .

Beispiel: Markovsche Aufteilung für diskrete dynamische Systeme. Wir betrachten eine Abbildung  $F : I \rightarrow I$ , und das Ziel ist, diese Abbildung mit Hilfe einer Markov-Kette zu beschreiben. Das wird möglich, wenn 1) die Zahl von Zuständen endlich ist, d.h. das Intervall kann auf endliche Zahl von Unterintervallen aufgeteilt werden 2) Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind von der Geschichte unabhängig, d.h. davon unabhängig, wo auf dem Unterintervall sich der Zustandspunkt befindet. Die Bedingung 2 wird erfüllt, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte auf jedem Intervall konstant ist. Diese Eigenschaft wird bei der Abbildung erhalten, wenn die Abbildung 1) die Rände von Unterintervallen in die Rände abbildet, und 2) auf jedem Unterintervall linear ist. Dann

$$Q_{nn'} = \frac{b_n}{b_{n'}|a_{n'}|}$$

wobei  $a_{n'}$  die Steigung der Abbildung auf dem Intervall  $n'$  ist und  $b_n$  die Länge des Intervalls  $n$  ist. Man sieht, dass  $Q$  eine stochastische Matrix ist, weil

$$\sum_n Q_{nn'} = \frac{\sum_n b_n}{b_{n'}|a_{n'}|} = \frac{|F(b_{n'})|}{b_{n'}|a_{n'}|} = 1$$

gilt.

Beispiel: Bernoulli-Abbildung:  $x \rightarrow x/a$  wenn  $x < a$ , und  $x \rightarrow (x-a)/(1-a)$  wenn  $a < x < 1$ . Hier

$$Q = \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$$

Der Eigenvektor ist  $|a_0\rangle = (a, 1-a)$ .

# Kapitel 4

## Die Fokker-Planck-Gleichung

### 4.1 Von der Master-Gleichung zur Fokker-Planck-Gleichung

Wir betrachten zuerst eine einfache Form der Master-Gleichung für den Irrweg in einer Dimension. Sei die Wahrscheinlichkeit des Sprungs nach links  $\alpha$  und nach rechts  $\beta$ . Dann erfüllt die Übergangswahrscheinlichkeit  $P(n, t|n_0, t_0)$

$$\frac{dP(n, t)}{dt} = \alpha P(n+1, t) + \beta P(n-1, t) - (\alpha + \beta)P(n, t)$$

Wir führen eine kontinuierliche Variable  $x = nl$  ein. Dann

$$\frac{dP(x, t)}{dt} = \alpha P(x+l, t) + \beta P(x-l, t) - (\alpha + \beta)P(x, t)$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach  $x$

$$\begin{aligned} \frac{dP(x, t)}{dt} &= \alpha \left[ P + l \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dots \right] + \beta \left[ P - l \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dots \right] - (\alpha + \beta)P \\ &= l(\alpha - \beta) \frac{\partial P}{\partial x} + (\alpha + \beta) \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{(\alpha - \beta)l^3}{6} \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} + \dots \end{aligned}$$

Betrachten wir den Grenzwert  $l \rightarrow 0$ . Die endliche Terme entstehen wenn  $\alpha + \beta \sim l^{-2}$ ,  $\alpha - \beta \sim l^{-1}$ . Wir bezeichnen

$$A = \lim_{l \rightarrow 0} -(\alpha - \beta)l \quad B = \lim_{l \rightarrow 0} -(\alpha - \beta)l^2/2$$

Der nächste Term ist klein:  $(\alpha - \beta)l^3 \sim l^2 \ll 1$ . Als Ergebnis erhalten wir eine partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -A \frac{\partial P}{\partial x} + B \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Im allgemeinen kann man eine partielle Differentialgleichung aus der Entwicklung der Master-Gleichung erhalten. Wir schreiben die Master-Gleichung

$$\frac{\partial P(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \int dx' [W(x|x')P(x') - W(x'|x)P(x)]$$

Jetzt setzen wir in den ersten Term  $x' = x - y$  und in den zweiten Term  $x' = x + y$ :

$$= \int dy [W(x|x-y)P(x-y) - W(x+y|x)P(x)]$$

Wir bezeichnen  $W(x+y|x) = t(y, x)$ , dann  $W(x|x-y) = t(y, x-y)$  und wir erhalten

$$= \int dy [t(y, x-y)P(x-y) - t(y, x)P(x)]$$

Jetzt entwickeln wir nach  $y$

$$\begin{aligned} &= \int dy \sum_0^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} t(y, x)P(x) - t(y, x)P(x) = \int dy \sum_1^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} t(y, x)P(x) \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} P(x) \int dy t(y, x)y^n \end{aligned}$$

Hier

$$\int dy t(y, x)y^n = \int d\Delta x (\Delta x)^n W(x + \Delta x|x) = a_n(x)$$

sind die Momente der Übergangswahrscheinlichkeit. Wir erhalten die Kramers-Moyal-Entwicklung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} a_n(x)P(x)$$

Wenn

$$A = a_1 = \int d\Delta x (\Delta x)W(x+\Delta x|x) \neq 0 \quad B = a_2 = \int d\Delta x (\Delta x)^2 W(x+\Delta x|x) \neq 0$$

aber alle weitere Momente sind Null, dann erhalten wir die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial P(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)P$$

Beispiel.

Wir betrachten den Fall  $A(x) = -x$ ,  $B(x) = 1$ :

$$\frac{\partial P(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} xP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$$

Suchen wir die Lösung in der Form

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}} \exp\left[-\frac{(x - a(t))^2}{2D(t)}\right]$$

Dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{x-a}{D} \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D(t)}\right] \\ \frac{\partial x P}{\partial x} &= x \frac{\partial P}{\partial x} + P = -\frac{x(x-a)}{D^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right] \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= -\frac{1}{D^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right] + \frac{(x-a)^2}{D^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right] \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{-1/2D'}{D^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right] + \frac{(x-a)^2 D'}{2D^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right] + \frac{2(x-a)a'}{2D^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right]\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}-\frac{D'}{2D^{3/2}} + \frac{(x-a)^2 D'}{2D^{5/2}} + \frac{(x-a)a'}{D^{3/2}} &= \frac{1}{D^{1/2}} - \frac{x(x-a)}{D^{3/2}} - \frac{1}{D^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{D^{5/2}} \\ \left(-\frac{D'}{2D^{3/2}} + \frac{1}{D^{3/2}} - \frac{1}{D^{1/2}}\right) + (x-a)^2 \left(-\frac{D'}{2D^{3/2}} + \frac{1}{D^{3/2}} - \frac{1}{D^{1/2}}\right) + \frac{(x-a)(a'+a)}{D^{3/2}} &= 0 \\ \frac{-D' + 2 - 2D}{2D^{3/2}} + (x-a)^2 \frac{D' - 2 + 2D}{2D^{5/2}} + \frac{x-a}{D^{3/2}}(a'+a) &= 0\end{aligned}$$

Daraus folgt  $a' = -a$  und  $D' = 2 - 2D$ . Die Lösung ist

$$\begin{aligned}a &= x_0 e^{-t} & D &= 1 - e^{-2t} \\ P &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \exp\left[-\frac{(x-x_0 e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}\right]\end{aligned}$$

Das ist die Übergangswahrscheinlichkeit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.

Die Fokker-Planck-Gleichung wurde für die Übergangswahrscheinlichkeit  $P(x, t|x_0, t_0)$  geschrieben, die die Anfangsbedingung  $P(x, t_0|x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$  erfüllt. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte gilt die selbe Gleichung

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)w + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)w$$

## 4.2 Die Langevin-Methode

In der Langevin-Methode wird der Einfluss von Fluktuationen auf ein System mit makroskopisch bekannter Dynamik durch stochastische Differentialgleichungen modelliert. Sei das System mit der Gleichungen

$$\dot{x} = A(x)$$

beschrieben. Nach der Langevin-Methode wird dazu die Zufallskraft addiert, die

- 1) Gaussisch mit dem Mittelwert 0 ist;
- 2) Delta-korreliert ist  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = B\delta(t - t')$ ;
- 3) Von  $x$  unabhängig ist.

Wir schreiben

$$\dot{x} = A(x) + \xi(t)$$

und betrachten den Zuwachs von  $x$ :

$$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} A(x(t')) dt' + \int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt'$$

Wir finden jetzt die ersten und zweiten Momente von  $\Delta x$ :

$$\langle \Delta x \rangle = A(x)\Delta t$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\int_t^{t+\Delta t} A(x(t')) dt')^2 \rangle + \langle (\int_t^{t+\Delta t} A(x(t')) dt' \int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt') \rangle + \langle (\int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt')^2 \rangle$$

Der erste Term  $\sim (\Delta t)^2$ , der zweite Term  $\sim (\Delta t)^{3/2}$ , der dritte Term  $\sim (\Delta t)$ :

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \approx \langle (\int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt')^2 \rangle = B\Delta t$$

Die Ergebnis lautet

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)P + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Wir betrachten jetzt einen allgemeineren Fall, wenn das Rauschen von  $x$  abhängt:

$$\dot{x} = A(x) + C(x)\xi(t), \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$$

Setzen wir eine Transformation  $y = \int \frac{dx}{C(x)}$  ein:

$$\dot{y} = \dot{x}/C(x) = A(x)/C(x) + \xi(t) = \bar{A}(y) + \xi(t)$$

Für diese Langevin-Gleichung können wir schon die Fokker-Planck-Gleichung schreiben

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \bar{A}(y)P(y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P$$

Jetzt machen wir die Rücktransformation

$$P(y)dy = P(x)dx \quad P(y) = P(x)C(x)$$

und erhalten

$$C \frac{\partial P(y)}{\partial t} = -C \frac{\partial}{\partial x} A(x)P(x) + \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial x} C \frac{\partial}{\partial x} PC$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}A(x)P(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}C(x)\frac{\partial}{\partial x}C(x)P(x)$$

Der Wahrscheinlichkeitsfluss ist jetzt

$$A(x)P(x) - \frac{1}{2}C(x)C'(x)P(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}C^2(x)P(x)$$

In diesem Verfahren haben wir angenommen, dass die stochastische Gleichung die selbe Variablentransformationen durchführen lässt wie die einfache Differentialgleichungen. Das Problem ist aber in der Interpretation des stochastischen Terms.

Betrachten wir die Gleichung  $\dot{x} = C(x)\delta(t)$ . Eine Lösung erhält man, wenn durch  $C(x)$  dividiert wird:

$$\int \frac{dx}{C(x)} = \int \delta(t) = 1$$

Eine andere Lösung  $x_+ - x_- = C(x_-)$  erhält man in der Annahme, dass  $x$  sich während der Wirkung der Delta-Funktion nicht ändert.

Genau so kann man die stochastische Differentialgleichung verschieden interpretieren. Wenn

$$x(t + \Delta t) = A(x)\Delta t + C\left(\frac{x(t + \Delta t) + x(t)}{2}\right) \int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt'$$

gilt, dann nennt man diese Interpretation die Stratonovich-Interpretation. Die Interpretation

$$x(t + \Delta t) = A(x)\Delta t + C(x(t)) \int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt'$$

wird Ito-Interpretation genannt. Diese Interpretation ist mit der normalen Variablentransformationen nicht vertretbar, deshalb gibt es eine spezielles Ito-Kalkül.

Der Satz von Wong und Zakai sagt, dass ein Prozess mit charakteristischen Korrelationszeit  $\tau_0$  für  $\tau_0 \rightarrow 0$  zum einen Stratonovich-Prozess konvergiert. Trotzdem wird von Mathematikern die Ito-Form bevorzugt.

Ohne Herleitung schreiben wir hier die allgemeine Form der FPGlh aus:

$$\dot{x}_i = f_i(x, t) + g_i(x, t) \quad \langle g_i(x, t)g_j(x', t') \rangle = 2B_{ij}(x, x', t)\delta(t - t')$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}P(x, t)[f_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_j}B_{ij}(x, x', t)|_{x'=x}] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}P(x, t)B_{ij}(x, x, t)$$

Beispiel: FPGlh. in einer Dimension.

Die Langevin-Gleichung lautet

$$\dot{x} = f(x) + \xi(t) \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2B\delta(t - t')$$

Die FPGlh lautet

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x)P + B \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$$

Die stationäre Lösung erhalten wir wenn  $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ . Dann

$$-\frac{\partial}{\partial x} (f(x)P - B \frac{\partial P}{\partial x}) = 0 \quad f(x)P - B \frac{\partial P}{\partial x} = C_1$$

Nehmen wir an, dass der Fluss  $C_1$  Null ist (wir werden auch ein Gegenbeispiel betrachten). Dann

$$\frac{d \ln P}{dx} = \frac{f(x)}{B} \quad \ln P = \int \frac{f(x')}{B} dx'$$

Führen wir jetzt das Potential  $U(x) = -\int f(x') dx'$  ein. Dann

$$P(x, t) = C e^{-\frac{U(x)}{B}}$$

wobei  $C$  aus der Normalisierungsbedingung

$$C^{-1} = \int e^{-\frac{U(x)}{B}} dx$$

gefunden werden kann.

Beispiel: Ein Oszillator mit Reibung und Rauschen wird mit der folgenden Langevin-Gleichung beschrieben:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = f(x) + \xi(t) \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2B \delta(t - t')$$

Wir schreiben diese Gleichung als ein System 2. Ordnung um

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -\gamma y + f(x) + \xi(t)$$

Die FPGl lautet

$$\frac{\partial P(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [-\gamma y + f(x)] P - \frac{\partial}{\partial x} y P + B \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

Wir suchen die stationäre Lösung in der Form  $P = C e^{V(x)+W(y)}$  und erhalten

$$\gamma - (-\gamma y + f(x))W' - yV' + B(W'' + W'^2) = 0$$

Wir setzen hier  $W = -ay^2$  ein:

$$\gamma - (-\gamma y + f(x))(-2ay) - yV' + B(-2a + 4a^2y^2) = 0$$

$$\gamma - 2aB + 4Ba^2y^2 - \gamma 2ay^2 + 2ayf(x) - yV' = 0$$

Daraus folgt

$$\gamma = 2aB \quad 2af(x) = V'$$

und

$$W(y) = -\frac{\gamma}{2B}y^2 \quad V(x) = \frac{\gamma}{B} \int f(x) dx = -\frac{\gamma}{B}U(x)$$

wobei  $U(x)$  das Potential ist. Endgültig

$$P = C e^{-\frac{\gamma}{2B}y^2 - \frac{\gamma}{B}U(x)}$$

Das ist genau die kanonische Verteilung, vorausgesetzt  $\frac{\gamma}{B} = \beta = 1/kT$ . Deshalb kann ein Oszillator im thermischen Gleichgewicht mit einer Langevin-Gleichung modelliert werden. Dabei müssen die Reibung und das Rauschen  $\frac{\gamma}{B} = \beta = 1/kT$  erfüllen, die modellieren also ein Thermostat (Wärmebad) mit der Temperatur  $T$ .

Beispiel: Josephson-Kontakt.

Die Phase des Josephson-Kontakts bestimmt den Strom und die Spannung:

$$I_J = I_c \sin \phi \quad V_J = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}$$

Wenn ein Widerstand parallel zum Kontakt vorhanden ist, dann lauten die Gleichungen

$$I_0 = I_c \sin \phi + \frac{V}{R} \quad V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}$$

oder

$$\frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin \phi = I_0$$

wobei  $I_0$  der aussere Strom ist. Wir nehmen an, dass der Strom  $I_0$  eine reguläre sowie eine zufällige Komponente hat. Wenn das Rauschen Null ist, dann hat das System zwei Zustände: ein stabiler Fixpunkt für  $|I_0| < I_c$  und ein periodischer Orbit für  $|I_0| > I_c$ . Mit dem Rauschen gilt

$$\dot{\phi} = \Delta - A \sin \phi + \xi(t) \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2B\delta(t-t')$$

wobei

$$\Delta = \frac{2eRI_0}{\hbar} \quad A = \frac{2eRI_c}{\hbar}$$

Die FPGl lautet

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \phi} [(\Delta - A \sin \phi)w] + B \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}$$

Wir schreiben diese Gleichung als

$$\dot{w} + \frac{\partial G}{\partial \phi} \quad G = (\Delta - A \sin \phi)w - B \frac{\partial w}{\partial \phi}$$

um. Der Fluss  $G$  ist im stationären Zustand nicht Null, sondern eine Konstante

$$B \frac{\partial w}{\partial \phi} - (\delta - A \sin \phi)w = a$$

Wir suchen die Lösung in der Form

$$w = q(\phi) e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B}\cos\phi}$$

Dann

$$B(\delta - A \sin \phi) / Bw + B e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B}\cos\phi} q' - (\delta - A \sin \phi)w = a$$

$$q' = \frac{a}{B} e^{-\frac{\Delta}{B}\phi - \frac{A}{B}\cos\phi}$$

$$q(\phi) = \frac{a}{B} \int_C^\phi d\psi e^{-\frac{\Delta}{B}\psi - \frac{A}{B}\cos\psi}$$

Die allgemeine stationäre Lösung lautet

$$w(\phi) = \frac{a}{B} e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B}\cos\phi} \int_C^\phi d\psi e^{-\frac{\Delta}{B}\psi - \frac{A}{B}\cos\psi}$$

Die zwei Bedingungen sollen erfüllt werden:

- 1) Periodizität:  $w(\phi + 2\pi) = w(\phi)$
- 2) Normierung:  $\int_0^{2\pi} w(\phi) d\phi = 1$ .

Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn wir

$$w = \frac{1}{N} e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B}\cos\phi} \int_\phi^{\phi+2\pi} d\psi e^{-\frac{\Delta}{B}\psi - \frac{A}{B}\cos\psi}$$

schreiben. Dann

$$N = \int_0^{2\pi} d\phi e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B}\cos\phi} \int_\phi^{\phi+2\pi} d\psi e^{-\frac{\Delta}{B}\psi - \frac{A}{B}\cos\psi}$$

Der Ansatz  $\chi = \psi - \phi$  ergibt

$$N = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\chi e^{-\frac{\Delta}{B}\chi + 2\frac{A}{B}\sin\chi/2 \sin(\phi+\chi/2)}$$

Weiter benutzen wir  $\int_0^\pi e^{z \cos x} dx = \pi I_0(z)$ :

$$N = 2\pi \int_0^{2\pi} d\chi e^{-\frac{\Delta}{B}\chi} I_0\left(2\frac{A}{B}\sin\chi/2\right)$$

Mit dem Ansatz  $y = 0.5(\pi - \chi)$   $0 < \chi < \pi$  und  $y = 0.5(\chi - \pi)$   $\pi < \chi < 2\pi$  erhalten wir

$$\begin{aligned} N &= 8\pi e^{-\pi\frac{\Delta}{B}} \int_0^{\pi/2} \cosh\left(2\frac{\Delta}{B}y\right) I_0\left(2\frac{A}{B}\cos y\right) dy \\ &= 4\pi^2 e^{-\pi\frac{\Delta}{B}} I_{i\frac{\Delta}{B}}\left(\frac{A}{B}\right) I_{-i\frac{\Delta}{B}}\left(\frac{A}{B}\right) \end{aligned}$$

wobei  $I_{iz}$  die Bessel-Funktion der imaginären Ordnung und des imaginären Arguments ist. Wenn  $\Delta = 0$ , also der mittlere Strom Null ist, dann

$$W(\phi) = \frac{e^{\frac{A}{B}\cos\phi}}{2\pi I_0\left(\frac{A}{B}\right)}$$

Wir finden jetzt die mittlere Spannung (die Gleichspannung):

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \langle \Delta - A \sin \phi \rangle = \int_0^{2\pi} (\Delta - A \sin \phi) w(\phi) d\phi$$

Aber  $G = (\Delta - A \sin \phi)w - B \frac{\partial w}{\partial \phi}$ , deshalb

$$\langle \dot{\phi} \rangle = 2\pi G$$

Wir berechnen den Fluss  $G$ :

$$\begin{aligned} G &= \frac{(\Delta - A \sin \phi)}{N} e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B} \cos \phi} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\psi e^{-\frac{\Delta}{B}\psi - \frac{A}{B} \cos \psi} \\ &\quad - \frac{B(\Delta/B - A/B \sin \phi)}{N} e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B} \cos \phi} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\psi e^{-\frac{\Delta}{B}\psi - \frac{A}{B} \cos \psi} \\ &\quad - \frac{B}{N} e^{\frac{\Delta}{B}\phi + \frac{A}{B} \cos \phi} e^{-\frac{\Delta}{B}\phi - \frac{A}{B} \cos \phi} (e^{-\frac{\Delta}{B}2\pi} - 1) \\ &= \frac{B}{N} (1 - e^{-\frac{\Delta}{B}2\pi}) \end{aligned}$$

Die Gleichspannung ist

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \frac{2\pi B}{N} (1 - e^{-\frac{\Delta}{B}2\pi})$$

### 4.3 Zufallszeiten bis zum Erreichen einer Schwelle

Wir betrachten einen Zufallsprozess, der durch die FPGl beschrieben wird

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t|x_0, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)P$$

Wir betrachten das Problem des Erreichens der Schwellen  $a, b$  (first passage problem). Weil wir uns nur um die ersten Erreichenzeiten kümmern, betrachten wir die Rände  $x = a, b$  als absorbierend: Falls das Teilchen einen der beiden Rände erreicht hat, wird es nicht mehr verfolgt. Deshalb haben wir die Randbedingungen

$$P(a, t|x_0, 0) = P(b, t|x_0, 0) = 0$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit  $t$  noch kein Rand erreicht war, ist

$$G(x_0, t) = \int_a^b P(x, t|x_0, 0) dx$$

Die Variablen  $x_0$  und  $t$  gehören zu verschiedenen Ereignissen, deshalb wir die Zeit verschieben

$$G(x_0, t) = \int_a^b P(x, 0|x_0, -t) dx$$

Wir leiten jetzt die Differentialgleichung für die Größe  $G(x_0, t)$  her. Weil diese Größe von Anfangswerten abhängig ist, brauchen wir die konjugierte Fokker-Planck-Gleichung. Wir gehen von der Chapman-Kolmogorov-Gleichung aus:

$$P(x, t|x_0, t_0 - \tau) = \int dy P(x, t|y, t_0) T_\tau(y|x_0)$$

Wir entwickeln  $P(x, t|y, t_0)$  um  $y$ :

$$P(x, t|y, t_0) = P(x, t|x_0, t_0) + (y - x_0) \frac{\partial P}{\partial x_0} + \frac{(y - x_0)^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_0^2}$$

und erhalten

$$P(x, t|x_0, t_0 - \tau) - P(x, t|y, t_0) = \frac{\partial P}{\partial x_0} \int dy (y - x_0) T_\tau(y|x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_0^2} \int dy T_\tau(y|x_0) (y - x_0)^2$$

Nach unserer Definition

$$\int dy (y - x_0) T_\tau(y|x_0) = A(x_0) \tau \quad \int dy T_\tau(y|x_0) (y - x_0)^2 = B(x_0) \tau$$

Deshalb erhalten wir

$$-\frac{\partial}{\partial t_0} P(x, t|x_0, t_0) = A(x_0) \frac{\partial P}{\partial x_0} + \frac{1}{2} B(x_0) \frac{\partial^2 P}{\partial x_0^2}$$

Jetzt integrieren wir diese Gleichung von  $a$  bis  $b$  und erhalten die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x_0, t) = A(x_0) \frac{\partial G}{\partial x_0} + \frac{1}{2} B(x_0) \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2}$$

Zu diese Gleichung gehören Randbedingungen

$$G(a, t) = G(b, t) = 0$$

und die Anfangsbedingung

$$G(x, 0) = 1, \quad a \leq x \leq b$$

$G(x_0, t)$  ist die Werscheinlichkeitsverteilung; die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte ist  $-\frac{\partial G}{\partial t}$ .

Wir berechnen die mittlere Zeit bis zum Erreichen der Ränder

$$T(x) = - \int_0^\infty t \frac{\partial G}{\partial t} dt = \int_0^\infty G(x, t) dt$$

Analog

$$T_n(x) = \langle t^n \rangle = n \int_0^\infty t^{n-1} G(x, t) dt$$

Wir multiplizieren die Gleichung für  $G$  mit  $nt^{n-1}$  und integrieren von 0 bis  $\infty$ :

$$-1 = A(x) \frac{dT}{dx} + \frac{B(x)}{2} \frac{d^2T}{dx^2}$$

$$-nT_{n-1}(x) = A(x) \frac{dT_n}{dx} + \frac{B(x)}{2} \frac{d^2T_n}{dx^2}$$

Diese Gleichungen muss man mit den Randbedingungen  $T_n(a) = T_n(b) = 0$  lösen.

Beispiel: Irrweg auf dem Intervall  $a \leq x \leq b$ , mit  $A = 0, B = konst.$  Die mittlere Zeit erfüllt  $-1 = B/2 d^2T/dx^2$ . Die Lösung lautet

$$T = \frac{(x-a)(b-x)}{B}$$

Die maximale Zeit ist für  $x = (a+b)/2$ , sie lautet  $T_{max} = ((b-a)/2)^2/B = (\Delta x)^2/B$ .

Beispiel: Irrweg mit einem Rand  $x \geq 0$ . Die Gleichung für  $G$  ist

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{B}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

und die Lösung mit der Randbedingung  $G(0, t) = 0$  und der Anfangsbedingung  $G(x, 0) = 1$  ist

$$G = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2Bt}}} e^{-s^2} ds$$

Die Größe  $-\frac{\partial G}{\partial t}$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Erreichenzeit:

$$\frac{2x}{t^{3/2} \sqrt{2\pi B}} e^{-\frac{x^2}{2Bt}}$$

Die mittlere Zeit ist unendlich. Interessantweise ist die Verteilung eine stabile Verteilung mit dem Index  $\alpha = 1/2$ . Weil der Wiener-Prozess als  $x^2 \sim t$  skaliert, kann man schreiben  $T_a = T_1 \sqrt{a}$ , wobei  $T_a$  die Zufallszeit des Erreichen der Schwelle  $a$  ist. Das Erreichen der Schwelle  $a+b$  kann als zwei unabhängige Ereignisse (das Erreichen der Schwelle  $a$  und das Erreichen der Schwelle  $b$ ) betrachtet werden, deshalb

$$a^{1/2} T_1 + b^{1/2} T_2 = (a+b)^{1/2} T$$

was eine stabile Verteilung der Ordnung  $1/2$  definiert.

Wir betrachten jetzt die Zeit bis zu Erreichen nur eines Randes (d.h. anderer Rand ist  $-\infty$ ). Wir lösen die Gleichung

$$\frac{B(x)}{2} T'' + A(x) T' + 1 = 0$$

Mit dem Ansatz

$$T' = e^{-q(x)} F(x) \quad q(x) = \int_0^x \frac{2A(v)}{B(v)} dv$$

erhalten wir

$$F' = -\frac{2}{B(x)} e^{q(x)} \quad F(x) = \int^x \frac{-2}{B(y)} e^{q(y)} dy$$

und

$$T = -2 \int_{C_1}^x dz e^{-q(z)} \int_{C_2}^z \frac{e^{q(y)}}{B(y)} dy$$

Die Integrationsrände sind  $C_1 = b$  und  $C_2 = -\infty$ :

$$T = 2 \int_x^b dz e^{-q(z)} \int_{-\infty}^z \frac{e^{q(y)}}{B(y)} dy$$

Wir betrachten jetzt die Bewegung in einem Potential  $A(x) = -dU/dx$  unter Wirkung der Zufallkraft, so dass  $B = 2\sigma^2$ . Dann  $q(x) = -U(x)/\sigma^2$  und

$$T(x) = \frac{1}{\sigma^2} \int_x^b e^{\frac{U(z)}{\sigma^2}} dz \int_{-\infty}^z dy e^{-\frac{U(y)}{\sigma^2}}$$

Wir betrachten ein Potential mit zwei Minima  $a$  und  $b$  und betrachten den Übergang  $a \rightarrow b$ . Dabei wird das erste Integral durch den Maximalpunkt  $c$  bestimmt:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\frac{U(z)}{\sigma^2}} dz &\approx e^{\frac{U(c)}{\sigma^2}} \int e^{-\frac{|U''|}{2\sigma^2}(z-c)^2} dz \\ &= e^{\frac{U(c)}{\sigma^2}} \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{|U''(c)|}} \end{aligned}$$

Das zweite Integral für  $z = c$  wird durch den Minimalpunkt  $y = a$  bestimmt:

$$\int_{-\infty}^z e^{-\frac{U(y)}{\sigma^2}} \approx e^{-\frac{U(a)}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|U''(a)|}{2\sigma^2}(y-a)^2} dy \approx e^{-\frac{U(a)}{\sigma^2}} \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{|U''(a)|}}$$

Zusammenfassend erhalten wir den Kramers-Formel (Arrhenius-Formel)

$$T \approx e^{\frac{U(c)-U(a)}{\sigma^2}} \frac{2\pi}{\sqrt{|U''(a)U''(c)|}}$$

Beispiel: Für den Josephson-Kontakt haben wir die Gleichung

$$\dot{\phi} = \Delta - A \sin \phi + \xi(t)$$

was dem Potential  $U(\phi) = -\Delta\phi + A \cos \phi$  entspricht. Die Minimalpunkte des Potentials sind  $\phi_{min} + 2\pi n$ , und die Maximalpunkte sind  $\phi_{max} + 2\pi n$ . Der Übergang  $\phi_{min} \rightarrow \phi_{min} + 2\pi$  hat die Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit)

$$R_+ \approx \frac{\sqrt{|U''(a)U''(c)|}}{2\pi} e^{\frac{U(\phi_{min})-U(\phi_{max})}{\sigma^2}}$$

Der Übergang  $\phi_{min} \rightarrow \phi_{min} - 2\pi$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$R_- \approx \frac{\sqrt{|U''(a)U''(c)|}}{2\pi} e^{\frac{U(\phi_{min})-U(\phi_{max}-2\pi)}{\sigma^2}} = R_+ e^{2\pi\Delta/\sigma^2}$$

Hier diskutieren wir einen alternativen Zugang zum Problem des Erreichens einer Schwelle.

Wir betrachten die FPGI

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)w + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)w = -\frac{\partial}{\partial x} J(x)$$

und fügen hier eine Quelle ein:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} J(x) + \delta(x - x_0)$$

Diese Quelle erzeugt Teilchen, die am absorbierenden Rändern  $a$  und  $b$  verschwinden. Dabei bildet sich eine stationäre Lösung

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \delta(x - x_0) \quad w(a) = w(b) = 0$$

Im Bereich A ( $a < x < x_0$ ) und im Bereich B ( $x_0 < x < b$ ) haben wir konstante Flüsse  $J_A$  und  $J_B$ , die im Punkt  $x_0$  die bedingung  $J_B - J_A = 1$  erfüllen. Ausserdem ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(x)$  im Punkt  $x_0$  stetig. Diese zwei Bedingungen genügen, die Lösung im gesamten Bereich zu finden. Aus dieser Lösung können wir folgendes gewinnen:

1.  $|J_A|$  und  $|J_B|$  geben uns die Wahrscheinlichkeiten, die Ränder  $a$  und  $b$  zu erreichen.
2. Wir schreiben  $J_A = V_A w$ ,  $J_B = V_B w$  und erhalten die Geschwindigkeiten in Bereichen A und B. Die Integration ergibt die mittlere Zeiten,  $a$  oder  $b$  zu erreichen:

$$T_a = \int_a^{x_0} \frac{dx}{V_A}(x) \quad T_b = \int_{x_0}^b \frac{dx}{V_B}(x)$$

3. Die mittlere Zeit,  $a$  oder  $b$  zu erreichen, wird durch

$$T = |J_A|T_a + |J_B|T_b$$

gegeben.

Beispiel: Irrweg auf dem Intervall  $a < x < b$ . Die FPGI lautet

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)$$

Die Lösung wird in der Form

$$w_A = A(x - a) \quad w_B = B(b - x)$$

gesucht. Die Randbedingungen am  $x = x_0$  ergeben

$$Aa + Bb = 2x_0/D \quad A + B = 2/D$$

so dass

$$A = \frac{2}{D} \frac{b - x_0}{b - a} \quad B = \frac{2}{D} \frac{x_0 - a}{b - a}$$

Die Flüsse sind

$$|J_A| = \frac{DA}{2} = \frac{b - x_0}{b - a} \quad |J_B| = \frac{DB}{2} = \frac{x_0 - a}{b - a}$$

Das sind die Wahrscheinlichkeiten, bei  $a$  oder  $b$  zu landen. Die Geschwindigkeiten sind

$$|V_A| = \frac{|J_A|}{w_A} = \frac{D}{2(x_0 - a)} \quad |V_B| = \frac{|J_B|}{w_B} = \frac{D}{2(b - x_0)}$$

Deshalb

$$T_a = \int_a^{x_0} \frac{dx}{|V_A|} = \frac{(x_0 - a)^2}{D} \quad T_b = \int_{x_0}^b \frac{dx}{|V_B|} = \frac{(b - x_0)^2}{D}$$

Die mittlere Zeit ist

$$T = \frac{(x_0 - a)^2}{D} \frac{b - x_0}{b - a} + \frac{(b - x_0)^2}{D} \frac{x_0 - a}{b - a} = \frac{(x_0 - a)(b - x_0)}{D}$$

## 4.4 Stochastische Resonanz

Die stochastische Resonanz ist ein Phänomen, das in u.U. in periodisch- und rauschgetriebenen Systemen auftritt. Wir betrachten ein bistabiles System

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos \Omega t + \xi(t) \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t - t')$$

Wenn das Rauschen sehr schwach ist, ist die Übergangszeit sehr gross und die Übergänge sind selten.

Wenn das Rauschen sehr stark ist, ist die Übergangszeit sehr klein.

Wenn das Rauschen in der Mitte ist, ist die Übergangszeit ungefähr gleich die Periode der Kraft, und die Übergänge sind durch die periodische Kraft synchronisiert.

Wir betrachten ein diskretes Model der stochastischen Resonanz in der adiabatischen Näherung (die Frequenz  $\Omega$  ist sehr klein, das bedeutet, dass das Rauschen auch klein ist). Wir nehmen an, dass der Prozess nur zwei Werte hat  $x = \pm 1$ , mit der zeitabhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten  $W_{-+}(t)$  und  $W_{+-}(t)$ . Die Master-Gleichung lautet

$$\dot{p}_+ = -W_{-+}p_+ + W_{+-}p_- \quad \dot{p}_- = -W_{+-}p_- + W_{-+}p_+$$

Aus der Normierungsbedingung  $p_+ + p_- = 1$  folgt

$$\dot{p}_+ = -(W_{-+} + W_{+-})p_+ + W_{+-}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$p_+(t) = g(t)[p_+(t_0) + \int_{t_0}^t W_{+-} \frac{d\tau}{g(\tau)}]$$

wobei

$$g(t) = e^{\int_{t_0}^t (W_{-+} + W_{+-}) d\tau}$$

Wir benutzen für die Übergangswahrscheinlichkeiten die Formel

$$W_{-+} = R e^{\frac{A}{\sigma^2} \cos \Omega t} \quad W_{+-} = R e^{-\frac{A}{\sigma^2} \cos \Omega t}$$

wobei  $R$  die Kramers-Rate ist

$$R = e^{\frac{U(c)-U(a)}{\sigma^2}} \frac{2\pi}{\sqrt{|U''(c)U''(a)|}}$$

Mit der Annahme, dass  $A$  klein ist, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten wie folgt entwickeln

$$W_{-+} = R \left( 1 + \frac{A}{\sigma^2} \cos \Omega t + \frac{A^2}{2\sigma^4} \cos^2 \Omega t \dots \right)$$

Wir lassen nur die Terme 1. Ordnung in  $A$ , so dass

$$W_{-+} + W_{+-} = 2R \quad g(t) = e^{-2R(t-t_0)}$$

und

$$p_+(t) = e^{-2Rt} \left[ p_+(0) + \int_0^t e^{2R\tau} R \left( 1 + \frac{A}{\sigma^2} \cos \Omega \tau \right) d\tau \right]$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit während Zeit  $t$  ist

$$W_{++}(t, 0) = \frac{1}{2}(e^{-2Rt} + 1) + R \int_0^t d\tau e^{2R(\tau-t)} \frac{A}{\sigma^2} \cos \Omega \tau = \frac{1}{2}(e^{-2Rt} + 1) + \frac{RA}{\sigma^2} \cos(\Omega t + \bar{\phi})$$

wobei  $\tan \bar{\phi} = \Omega/2R$ . Für  $t \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$p_+(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{AR}{\sigma^2} \cos(\Omega t + \bar{\phi})$$

Weil  $R \sim e^{-\frac{c}{\sigma^2}}$ , erhalten wir

$$|p_+| \sim A \frac{e^{-\frac{c}{\sigma^2}}}{\sigma^2}$$

Diese Funktion hat ein Maximum, der der stochastischen Resonanz entspricht.

# Kapitel 5

## Einige stochastische Methoden

### 5.1 Mittelung von stochastischen Gleichungen

Wir betrachten die Langevin-Gleichung

$$\dot{x} = A(x, t) + \xi(t)$$

und möchten die Gleichungen für die Momente  $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle$  erhalten. Die Mittelung hier muss als Mittelung über Realisierungen des Zufallsprozesses  $\xi$  verstanden werden sein. Wir schreiben zuerst die FPIGL

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x, t)P + \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$$

Der Mittelwert ist

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t | x_0, 0) dx$$

Wir multiplizieren die FPIGL mit  $x$  und integrieren:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial P}{\partial t} dx &= \frac{\partial \langle x \rangle}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial A(x, t)P}{\partial x} dx + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(x, t)P dx - \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P dx = \langle A(x, t) \rangle \end{aligned}$$

Die Gleichung für  $\langle x^2 \rangle$  lautet

$$\frac{\partial \langle x^2 \rangle}{\partial t} = - \int x^2 \frac{\partial A P}{\partial x} dx + \sigma^2 \int x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P dx = 2 \langle x A(x, t) \rangle + \sigma^2$$

Wir können die mittlere Gleichungen auch für beliebige Funktion von  $x$  schreiben

$$\frac{\partial \langle F(x) \rangle}{\partial t} = \langle F'(x) A \rangle + \sigma^2 \langle F'' \rangle$$

Wenn  $A(x)$  eine lineare Funktion ist, entsteht für die Momente ein geschlossenes System. Z. B. wenn

$$A(x) = -\gamma x + \phi(t)$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \langle x \rangle}{\partial t} = -\gamma \langle x \rangle + \phi(t)$$

$$\frac{\partial \langle x^2 \rangle}{\partial t} = 2 \langle x(-\gamma x + \phi(t)) \rangle + \sigma^2 = -2\gamma \langle x^2 \rangle + 2 \langle x \rangle + \sigma^2$$

Wir zeigen jetzt, dass man die Langevin-Gleichungen auch direkt mitteln kann. Wenn

$$\dot{x} = A(x, t) + \xi(t)$$

gilt, dann erhalten wir für  $F(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x) = F'(x)A(x, t) + F'(x)\xi(t)$$

Das Hauptproblem ist, wie man den Mittelwert  $\langle F'(x)\xi(t) \rangle$  findet. Wir schreiben für  $x$

$$x(t) = x(t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t [A(x, \tau) + \xi(\tau)] d\tau$$

Dann für  $F'$  gilt

$$F'(x(t)) = F'(x(t - \Delta t)) + F'' \int_{t-\Delta t}^t [A(x, \tau) + \xi(\tau)] d\tau$$

Jetzt berücksichtigen wir, dass  $x(t - \Delta t)$  und  $\xi(t)$  unkorreliert sind. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle F'(x)\xi(t) \rangle &\approx F'' \langle \xi(t) \int_{t-\Delta t}^t \xi(\tau) d\tau \rangle = F'' \int_{t-\Delta t}^t \langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle d\tau \\ &= F'' \int_{t-\Delta t}^t 2\sigma^2 \delta(t - \tau) d\tau = F'' \sigma^2 \end{aligned}$$

(hier liegt nur die Hälfte der  $\delta$ -Funktion im Integrationsintervall).

Im allgemeinen ist die Langevin-Gleichung

$$\dot{x} = A(x, t) + C(x)\xi(t)$$

und die FPIGL lautet

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} AP + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} C(x) \frac{\partial}{\partial x} C(x) P$$

Für den Mittelwert der Funktion  $F$  erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F(x) \rangle = \langle F'(x)A \rangle + \frac{1}{2} \int F(x) \frac{\partial}{\partial x} C(x) \frac{\partial}{\partial x} C(x) P$$

$$= \langle F'(x)A \rangle - \frac{1}{2} \int F' C(x) \frac{\partial}{\partial x} C(x) P = \langle F'(x)A \rangle + \frac{1}{2} \langle C(x) \frac{\partial C(x) F'}{\partial x} \rangle$$

Das selbe erhält man aus der stochastischen Gleichung, wenn diese im Sinne von Stratonovich interpretiert wird

$$x(t) \approx x(t - \Delta t) + A(x, t) \Delta t + \langle C(x) \rangle \int_{t-\Delta t}^t \xi(\tau) d\tau$$

oder

$$f(x(t)) \approx f(x(t - \Delta t)) + f' A(x, t) \Delta t + \langle f' C(x) \rangle \int_{t-\Delta t}^t \xi(\tau) d\tau$$

Daraus folgt

$$\langle f(x) \xi \rangle = \langle f'(x) C(x) \rangle \sigma^2$$

Jetzt können wir die stochastische Gleichung mitteln

$$\frac{\partial \langle F(x) \rangle}{\partial t} = \langle F'(x) A(x, t) \rangle + \langle F'(x) C(x) \xi(t) \rangle = \langle F'(x) A(x, t) \rangle + \sigma^2 \langle C(x) \frac{\partial F' C}{\partial x} \rangle$$

Beispiel: Parametrische Erregung eines Oszillators. Die Langevin-Gleichung lautet

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \omega_0^2 \xi(t) x = 0 \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t - t')$$

Wir schreiben diese Gleichung als ein System um

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x - \omega_0^2 \xi(t) x$$

Die FPIGI lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} y P - \frac{\partial}{\partial y} (-\omega_0^2 x P) + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \omega_0^2 x P \\ &= -y \frac{\partial P}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial P}{\partial y} + \sigma^2 \omega_0^4 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Diese lineare Gleichung ist leider nicht lösbar. Für die ersten Momente erhalten wir

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle y \rangle \quad \frac{d\langle y \rangle}{dt} = -\omega_0^2 \langle x \rangle$$

Diese Gleichungen eines Oszillators haben die Lösung

$$\langle x \rangle = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \quad \langle y \rangle = \cos \omega_0 t$$

Für die Momente 2. Ordnung

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2\langle xy \rangle$$

$$\frac{d\langle xy \rangle}{dt} = \langle y^2 \rangle - \omega_0^2 \langle x^2 \rangle$$

$$\frac{d\langle y^2 \rangle}{dt} = -2\omega_0^2 \langle xy \rangle - 2\omega_0^2 \langle xy \xi(t) \rangle = -2\omega_0^2 \langle xy \rangle + 2\omega_0^4 \sigma^2 \langle x^2 \rangle$$

Wir haben ein geschlossenes lineares System von Differentialgleichungen. Die Eigenwerte erfüllen die Gleichung

$$-\lambda^2 + 4\omega_0^4 \sigma^2 - 4\omega_0^2 \lambda = 0$$

Für  $\sigma = 0$  die Lösungen sind  $0, \pm i2\omega_0$ . Für kleine  $\sigma$  ist  $\lambda \approx \omega_0^2 \sigma^2$ , was eine Instabilität bedeutet. Wenn die Gleichung Reibung hat

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \omega_0^2 \xi(t) x = 0$$

dann ergibt der Ansatz  $x \rightarrow x e^{-\gamma t}$  eine Gleichung ohne Dämpfung. Deshalb

$$\lambda \approx \omega_0^2 \sigma^2 - 2\gamma$$

und die Instabilität findet für  $\sigma^2 > 2\gamma/\omega_0^2$  statt.

## 5.2 Lineare stochastische Gleichungen

Wir betrachten eine lineare stochastische DGI mit dem multiplikativen Rauschen

$$\dot{u} = [A_0 + \alpha A_1(t)]u$$

wobei  $u$  ein Vektor ist,  $A_0$  eine konstante Matrix,  $A_1$  eine zeitabhängige Matrix, mit charakteristischer Korrelationszeit  $\tau_c$ . Wir machen eine Entwicklung in  $\alpha\tau_c \ll 1$ . Wir nehmen an, dass  $\langle A_1(t) \rangle = 0$ . Dann schreiben wir

$$u(t) = e^{tA_0} v(t) \quad \dot{v} = \alpha e^{-tA_0} A_1(t) e^{tA_0} v \equiv \alpha V(t)v$$

Die Lösung wird als eine Entwicklung gesucht

$$\begin{aligned} v_0 &= a \\ v_1 &= \alpha a \int_0^t V(t_1) dt_1 \\ v_2 &= \alpha^2 a \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) \end{aligned}$$

Jeder weitere Term ist  $\sim t\alpha$ , deshalb diese Entwicklung ist für  $t\alpha \ll 1$  gültig. Wir berechnen den Mittelwert für konstanten  $a$ .

$$\langle v_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_0 + v_2 \rangle = a + \alpha^2 a \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle V(t_1) V(t_2) \rangle \approx a + \alpha^2 a \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle$$

Für  $\tau_c \ll t \ll \alpha^{-1}$  kann man den Intervall  $(0, t_1)$  auf  $(0, \infty)$  ändern:

$$\langle v(t) \rangle \approx a + \alpha^2 a \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle d\tau$$

Das ist die erste Näherung für die DGI

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v(t) \rangle = \alpha^2 \left[ \int_0^\infty \langle V(t) V(t - \tau) \rangle d\tau \right] \langle v(t) \rangle$$

In ursprünglichen Variablen lautet die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u(t) \rangle = [A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t) e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) e^{-\tau A_0} \rangle d\tau] \langle u \rangle$$

Wenn  $\tau_c A_0 \ll 1$  ist, dann

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u(t) \rangle = [A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t) A_1(t - \tau) \rangle d\tau] \langle u \rangle$$

Beispiel: Parametrische Resonanz

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \omega_0^2 \alpha \xi(t) x = 0$$

Hier

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_0^2 \xi(t) & 0 \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch eine Reihenentwicklung erhalten wir

$$e^{\tau A_0} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \tau & \sin \omega_0 \tau / \omega_0 \\ -\omega_0 \sin \omega_0 \tau & \cos \omega_0 \tau \end{pmatrix}$$

Dann wenden wir die Matrixprodukt an:

$$\begin{aligned} & \langle A_1 e^{\tau A_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_0^2 \xi(t - \tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \tau & -\sin \omega_0 \tau / \omega_0 \\ \omega_0 \sin \omega_0 \tau & \cos \omega_0 \tau \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle A_1 \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \tau & \sin \omega_0 \tau / \omega_0 \\ -\omega_0 \sin \omega_0 \tau & \cos \omega_0 \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_0^2 \cos \omega_0 \tau \xi(t - \tau) & \omega_0 \sin \omega_0 \tau \xi(t - \tau) \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_0^2 \xi(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_0 \sin \cos \xi(t - \tau) & \sin^2 \xi(t - \tau) \end{pmatrix} \rangle \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_0^3 \sin \omega_0 \tau \cos \omega_0 \tau \langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle & -0 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 \tau \langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die DGI für den Mittelwert lautet

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle$$

$$\langle \dot{y} \rangle = -\omega_0^2 \langle x \rangle + \omega_0^3 \langle x \rangle \int_0^\infty \sin \omega_0 \tau \cos \omega_0 \tau \langle \xi(t) \xi(t-\tau) \rangle d\tau - \omega_0^2 \langle y \rangle \int_0^\infty \sin^2 \omega_0 \tau \langle \xi(t) \xi(t-\tau) \rangle d\tau$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle x \rangle + \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle x \rangle c_2 + \langle x \rangle (\omega_0^2 - \frac{\alpha^2 \omega_0^3}{2} c - 1) = 0$$

wobei

$$c_1 = \int_0^\infty \sin 2\omega_0 \tau l \langle \xi(t) \xi(t-\tau) \rangle d\tau$$

$$c_2 = \int_0^\infty (1 - \cos 2\omega_0 \tau) l \langle \xi(t) \xi(t-\tau) \rangle d\tau$$

Für  $\tau_c \rightarrow 0$  verschwinden  $c_1, c_2$ .

### 5.2.1 Die Dayson-Gleichung

Wir betrachten das Problem

$$\hat{L}x = \hat{N}(x, f(t)) + \xi(t)$$

wobei  $\hat{L}$  ein linearer Operator ist,  $\hat{N}$  ein nichtlinearer Operator ist,  $f(t), \xi(t)$  stochastische Prozesse sind. Wir trennen den Mittelwert und Fluktuationen

$$x = \langle x \rangle + \tilde{x}$$

und schreiben

$$\hat{L}\langle x \rangle = \langle \hat{N} \rangle \quad \hat{L}\tilde{x} = \hat{N}(\langle x \rangle + \tilde{x}, f) - \langle \hat{N} \rangle + \xi(t)$$

Dieses System enthält noch keine Näherung. Wir linearisieren die Gleichung für  $\tilde{x}$ , finden die lineare Lösung  $\tilde{x}^{(1)}$ , und setzen die in den Mittelwert  $\langle \hat{N} \rangle$ . Dann erhalten wir die Gleichung vom Typ

$$\hat{L}\langle x \rangle = F(\langle x \rangle)$$

die die Dayson-Gleichung entspricht.

Beispiel. Wir betrachten die Gleichung

$$\dot{x} + hx + \xi(t)x = 1 \quad \langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t-\tau) \rangle = K(\tau)$$

Die einfache Störungsmethode ergibt

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots \quad x_n \sim \xi^n$$

$$\dot{x}_0 + hx_0 = 1 \quad x_0 = 1/h$$

$$\dot{x}_1 + hx_1 = -\xi x_0 \quad x_1 = -\frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-h\tau} \xi(t-\tau) d\tau$$

$$\dot{x}_2 + hx_2 = -\xi x_1 \quad x_2 = \frac{1}{h} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 e^{-h(\tau_1+\tau_2)} \xi(t-\tau_1) \xi(t-\tau_1-\tau_2)$$

Nach der Mittelung erhalten wir

$$\langle x \rangle = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 e^{-h(\tau_1+\tau_2)} K(\tau_2) = \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_0^\infty d\tau e^{-h\tau} K(\tau) = \frac{h+\alpha}{h^2}$$

wobei

$$\alpha = \int_0^\infty d\tau e^{-h\tau} K(\tau) d\tau$$

Jetzt verwenden wir Dayson-Gleichung-Methode.  $\hat{L} = d/dt + h$ , deshalb

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + h\right)x &= -\xi x \\ \left(\frac{d}{dt} + h\right)\tilde{x} &= -\xi x + \langle \xi x \rangle \approx -\langle x \rangle \xi(t) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tilde{x}^{(1)} = -\langle x \rangle \int_0^\infty e^{-h\tau} \xi(t-\tau) d\tau$$

Jetzt berechnen wir den Mittelwert

$$\langle N \rangle = -\langle \xi \tilde{x} \rangle = \langle x \rangle \langle \xi(t) \int_0^\infty e^{-h\tau} \xi(t-\tau) d\tau \rangle = \langle x \rangle \int_0^\infty e^{-h\tau} K(\tau) d\tau = \langle x \rangle \alpha$$

Wir erhalten die Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt} + h\right)\langle x \rangle = \alpha \langle x \rangle + 1$$

deren stationäre Lösung lautet

$$\langle x \rangle = \frac{1}{h-\alpha}$$

Für  $\alpha \ll 1$  sind die zwei Lösungen gleich. Wenn  $K(\tau) = 2\sigma^2\delta(\tau)$ , ist  $\alpha = \sigma^2$  und  $\langle x \rangle = 1/(h-\sigma^2)$  ist die exakte Lösung.

### 5.3 Zufallsattraktor

Wir betrachten hier ein dynamisches System mit diskreter Zeit

$$x_{n+1} = f(x_n, \xi_n)$$

Früher haben wir das Problem der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $x_n$  betrachtet, d.h. der Verteilung bei verschiedenen Realisierungen des Prozesses  $\xi_n$ . Jetzt stellen wir eine andere Frage: Wie sieht die Verteilung für eine Realisierung von  $\xi(t)$  aus? Diese Verteilung wird durch verschiedene Anfangsbedingungen erzeugt, die heisst Zufallsattraktor (random attractor).

Nehmen wir an, dass die Verteilung  $w_n$  um Punkt  $x_n$  konzentriert ist. Dann

$$w_{n+1} = \langle \delta(x_{n+1} - f(x_n, \xi_n)) \rangle \cong \frac{w_n}{|f'(x_n)|}$$

Deshalb

$$w_N = \frac{w_0}{|f'_1 f'_2 f'_3 \dots f'_N|}$$

strebt entweder zu Null oder zu Unendlich. Die Grösse

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |f'_1 f'_2 f'_3 \dots f'_N|$$

ist der Lyapunovexponent des Systems. Wenn  $\lambda < 0$ , ist der Zufallsattraktor ein Punkt, wenn  $\lambda > 0$ , ist der Attraktor nicht-trivial.

Beispiel: zufallgetriebene Kreisabbildung.

$$x_{n+1} = x_n + \xi_n + a\eta_n \sin x_n$$

Hier

$$\lambda = \langle \ln |f'| \rangle = \langle \ln |1 + a\eta_n \cos x_n| \rangle$$

Wenn  $a \ll 1$ , dann

$$\lambda \cong \langle \eta_n \cos x_n - a^2 \eta_n^2 \cos^2 x_n \rangle = -\frac{a^2}{2} \langle \eta^2 \rangle$$

(hier wird angenommen, dass  $x_n$  ist homogen verteilt). Wenn  $a \gg 1$ , dann

$$\lambda \cong \langle \ln |a\eta_n \cos x_n| \rangle = \ln a + \langle \ln |\eta_n| \rangle + \langle \ln |\cos x_n| \rangle \sim \ln a$$

Der Lyapunovexponent ist negativ für kleine  $a$  und positiv für grosse  $a$ .

# Kapitel 6

## Self-avoiding walk, Perkolation

### 6.1 Self-trapping walk

Wir betrachten den Irrweg auf einer zwei-dimensionalen Gitter. Alle Plätze, die einmal besucht waren, gelten als verboten, d.h. der Weg beendet sich, wenn er kein neues Platz findet. Lehman und Weiss haben in 1958 bewiesen, dass die Bleibewahrscheinlichkeit nimmt exponentiell ab:

$$c'e^{-a'n} \leq p_n \leq ce^{-an}$$

wobei  $p_n$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass STW mindestens  $n$  Schritte macht. Das gilt in der Dimension  $d > 1$ .

Auf einer Ebene können wir die Beweisidee folgendens darstellen. Für jeden leeren Quadrat  $3 \times 3$  ist die Wahrscheinlichkeit, ein Weg hier zu beenden, endlich, d.h. größer als  $q$ . Deshalb ist die wahrscheinlichkeit,  $q$  Quadrate zu besuchen,  $(1 - q)^k$  und nimmt exponentiell ab. Numerische Ergebnisse ergeben  $\langle n \rangle \approx 71$  auf der 2-dimensionalen Quadratgitter.

### 6.2 Self-avoiding walk (SAW)

SAW ist zum STW ähnlich. Hier wird angenommen, dass alle Ketten mit Länge  $n$  die selbe Wahrscheinlichkeit haben. Diese SAW werden als Modelle für Polymerenketten benutzt. Eine wichtige Eigenschaft des SAW ist die Wachstumsrate des Abstandes:

$$\langle R_n^2 \rangle \propto n^{2\nu}$$

wobei  $2\nu > 1$  für  $d = 2$  und  $d = 3$ . Für einen einfachen Irrweg  $\nu = 1/2$  in jeder Dimension. Numerische Simulationen ergeben

$$2\nu \approx 1.5 \text{ für } d = 2$$

$$2\nu \approx 1.2 \text{ für } d = 3$$

Folgende Größe charakterisieren einen SAW: Die Länge  $L_n \approx (\langle R_n^2 \rangle)^{1/2}$  und die Dichte  $\rho(n) \approx \frac{n}{L_n^d}$ . Wenn die Dichte konstant ist  $\rho(n) \approx \text{const}$ , d.h.  $L_n \sim n^{1/d}$ , ist der Cluster kompakt. Wenn  $L_n \sim n^\nu$  und  $\nu > 1/d$ , dann  $\rho(n) \sim n^{1-d\nu} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Man kann eine effektive fraktale Dimension  $D$  einführen, so dass  $L_n^D \sim n$ . Es gilt  $D = 1/\nu$ . Für einfache Irrwege  $D = 2$  in jeder Dimension  $d$ . Der SAW hat kritische dimension 4, d.h. für  $d > 4$  die Schneidungen spielen keine Rolle und  $D = 2$ .

Man charakterisiert den SAW auch mit der Konnektivitätskonstante  $\mu = \log C_n / \log n$ , wobei  $C_n$  die Zahl von möglichen Ketten Länge  $n$  ist. Für einfache Irrwege  $\mu = z$ , wobei  $z$  die Zahl von Wege aus einem Gitterpunkt ist. Hara, Slade und Sokal haben bewiesen, dass  $\mu \geq \frac{z}{1+R}$ , wobei  $R$  die Rückkehrwahrscheinlichkeit für einfache Irrwege ist.

Beispiel: Betrachten wir ein Irrweg, wobei nur die Schritte nach Ost, West und Nord erlaubt sind. Sei  $C_n = a_n + b_n$ , wobei  $a_n$  ist die Zahl aller Wege mit letztem Schritt richtung Nord und  $b_n$  ist die Zahl aller Wege mit letztem Schritt nach Ost oder West. Die folgende Rekurrenzformeln sind leicht herzustellen:

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad b_{n+1} = 2a_n + b_n$$

Wenn wir  $a_n, b_n \sim e^{\mu n}$  einsetzen, erhalten wir

$$\mu = 1 + \sqrt{2} = 2.41\dots$$

Fisher hat nach Ideen von Flory die folgenden Formel hergeleitet

$$\nu = \frac{3}{d+2} \text{ für } d \leq 4 \quad = \frac{1}{2} \text{ für } d > 4$$

Die Formel basiert sich auf folgenden Annahmen:

- 1) Man nimmt an, dass die Dichte konstant bis zur Länge  $L$  ist:  $\rho \sim nL^{-d}$ .
- 2) Die self-avoiding wird als ein Abstoss modelliert, mit der Abstossenergie  $\sim \rho^2$ .
- 3) Die Diffusion wird durch eine Energie pro Schritt modelliert, die proportional zur Quadrat von  $L/n$  ist.

Die Gesamtenergie ist

$$E \cong AL^d(nL^{-d})^2 + Bn(L/n)^2 = An^2L^{-d} + BL^2n^{-1}$$

Das Minimum in  $l$  wird durch  $dE/dL$  gegeben:

$$-dAn^2L^{-d-1} + 2BLn^{-1} = 0 \quad L^{2+d} \sim n^3$$

Daraus folgt  $L \approx \langle R_n^2 \rangle^{1/2} \sim n^{\frac{3}{2+d}}$ . Für  $d = 3$  diese Formel ergibt  $\nu = 0.6$ , was mit numerischen Ergebnissen (0.585 von Grassberger) relativ gut Übereinstimmt.

## 6.3 Perkolation

Bei Perkolation untersucht man, ob die zufälligewise gewählte Punkte auf einem Gitter ein zusammengeschlossener Cluster bilden. Es gibt zwei Typen der Perkolation:

- 1) Site-Perkolation, wobei die Plätze auf dem Gitter mit Wahrscheinlichkeit  $p$  besetzt sind
- 2) Bond-Perkolation, wobei die Verbindungen zwischen Gitterpunkten mit Wahrscheinlichkeit  $p$  erlaubt sind.

Die Hauptfrage ist, bei welcher Wahrscheinlichkeit  $p$  entsteht ein unbegrenzter Cluster. Für Site-Perkolation

$$p_c = 0.592746 \text{ (quadr. Gitter)} \quad 0.3116 \text{ (kub. Gitter)} \quad 0.107 \text{ (} d = 6 \text{)}$$

Für Bond-Perkolation

$$p_c = 0.5 \text{ (quadr. Gitter)} \quad 0.2488 \text{ (kub. Gitter)} \quad 0.094 \text{ (} d = 6 \text{)}$$

Bei Dimension  $d = 1$   $p_c = 1$ , weil für jede  $p < 1$  entstehen leere Plätze. Die mittlere Größe des Clusters ist  $S = (1 + p)/(1 - p)$ .

Wir betrachten Perkolation auf dem Bethe-Gitter. Das Bethe-Gitter ist ein Baum, der für jeden Knoten  $z$  Zweige hat. Das Bethe-Gitter entspricht dimension  $d = \infty$ , weil hier das Verhältnis Oberfläche/Volumen radius-unabhängig ist. In der Tat, jede Niveau hat  $(z - 1)^n$  Punkte, und der Baum insgesamt hat  $1 + (z - 1) + \dots + (z - 1)^n$  Punkte.

Wir bauen jetzt ein Cluster auf dem Baum. nehmen wir an, dass der zentrale Punkt schon zum Cluster gehört. Aus dem Punkt kann man in Mittelwert  $(z - 1)p$  Wege bauen. Wenn  $(z - 1)p < 1$ , enden sich die Wege. deshalb

$$p_c = \frac{1}{z - 1}$$

Für recheckigen Gitter  $z = 2d$ , deshalb  $p_c = \frac{1}{2d-1}$ , was für grosse Dimensionen gilt.

Wir finden die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass ein Punkt zum Cluster gehört. Sei  $z = 3$ . Sei  $Q$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine Verbindung nicht bis  $\infty$  führt. Das ist der Fall wenn 1) entweder der Nachbarpunkt nicht besetzt ist (Wahrscheinlichkeit  $1 - p$ ) oder 2) der Nachbarpunkt besetzt ist, aber beider seine Verbindungen ins leere führen (Wahrscheinlichkeit  $pQQ$ ). Wir erhalten die Gleichung

$$Q = 1 - p + pQ^2$$

daraus folgt  $Q = (1 - p)/p$ .  $p - P$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt besetzt ist, aber nicht zum Cluster gehört, und die ist  $pQ^3$ . Deshalb  $P = p(1 - Q^3)$  und

$$P = p[1 - (\frac{1 - p}{p})^3]$$

# Kapitel 7

## Lokalisierung

### 7.1 Modelle

Wir betrachten hier ungeordnete Systeme, d.h. Systeme mit einem ungeordnetem Potential. In der Quantenmechanik schreibt man die Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im Potential  $U$  als

$$-\nabla^2\psi + U(\vec{r})\psi = E\psi$$

Hier ist  $U(\vec{r})$  eine Zufallsfunktion, und das Problem ist, die Quantenzustände des Systems zu untersuchen. Manchmal betrachtet man vereinfachte Modelle. Sei das Zufallspotential eine geordnete Reihe von  $\delta$ -Funktionen mit zufälligen Amplituden:  $U = \sum_n u_n \delta(x - an)$ . Die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi \sum_n u_n \delta(x - an) = E\psi$$

kann man zu einer diskreten Gleichung reduzieren. Ausserhalb der Stellen  $x = na$  gilt

$$\psi = b_+ e^{ikx} + b_- e^{-ikx} \quad k^2 = E$$

An der Stelle  $x = na$  ist die Wellenfunktion nicht glatt:

$$\frac{d\psi}{dx}\Big|_+ - \frac{d\psi}{dx}\Big|_- = u_n \psi_n$$

Jetzt stellen wir  $\frac{d\psi}{dx}$  durch  $\psi_n, \psi_{n-1}, \psi_{n+1}$  dar. Aus der Gleichungen

$$\psi_n = b_+ + b_- \quad \psi_{n+1} = b_+ e^{ika} + b_- e^{-ika}$$

folgt

$$\frac{d\psi}{dx}\Big|_+ = ikb_+ - ikb_- = \frac{k}{2 \sin ka} (2\psi_{n+1} - 2\psi_n \cos ka)$$

Analog gilt

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_- = \frac{k}{2 \sin ka} (-2\psi_{n-1} + 2\psi_n \cos ka)$$

Zusammengestellt erhalten wir

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - (2 \cos ka - \frac{u_n}{k} \sin ka) \psi_n = 0$$

Diese diskrete Gleichung ist ein Eigenwertproblem für die Matrix mit diagonalen Unordnung. Der Eigenwert  $k$  ist nichtlinear mit der Energie  $E = k^2$  verbunden.

Ein populäres Modell ist eine Atomkette

$$M_n \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K_n (u_{n+1} - u_n) - K_{n-1} (u_n - u_{n-1})$$

wobei die Massen  $M_n$  und die Kopplungspotentiale  $K_n$  Zufallszahlen sind. Für Eigenschwingungen erhalten wir

$$(-M_n \omega^2 + K_n + K_{n-1}) u_n = K_n u_{n+1} + K_{n-1} u_{n-1}$$

Wenn  $K_n = K$ , ist die Unordnung diagonal.

Ein populäres Modell ist das Kronig-Penny-Potential, wobei das Potential ein Telegraph-Prozess bildet (im allgemeinen auch ein nicht symmetrischer Prozess).

## 7.2 Wichtige Größen

### 7.2.1 Zustandsdichte

Eine geordnete Kette bildet ein Energie-Zonenstruktur. Z.B., die Atomkette mit konstanten  $M_n, K_n$  hat Frequenz  $\omega = 2\sqrt{K/M} |\sin k/2|$ . Hier haben wir nur eine Zone  $0 < \omega < 2\sqrt{K/M}$ . In einem ungeordnetem Medium sind die Zonenränder nicht scharf. Im Zentrum, wo  $\rho(E)$  ein Maximum hat, gibt es delokalisierte (räumlich ausgedehnte) Zustände mit kontinuierlichem Spektrum. Dieser Bereich  $E_c < E < E'_c$  wird von Mobilitätsrändern (mobility edges)  $E_c, E'_c$  begrenzt. Ausserhalb der Mobilitätsrändern, wo auch  $\rho(E) > 0$ , gibt es nur lokalisierte Zustände. Durch die Zustandsdichte werden verschiedene Charakteristiken wie Leitfähigkeit etc. dargestellt.

### 7.2.2 Eigenfunktionen

Die lokalisierte Eigenfunktionen haben für Grosse  $|x|$  die Gestalt  $\psi(x) \sim e^{-|x|/\lambda}$ , wobei  $\lambda$  die Lokalisierungslänge ist. Die Lokalisierung wird auch durch das zweite

Moment

$$P^{-1} = \sum_x |\psi(x)|^4 \quad \left( \sum_x |\psi(x)|^2 = 1 \right)$$

charakterisiert. Für ebene Wellen  $|\psi|^2 \sim L^{-d}$ , wobei  $L$  der Durchmesser und  $d$  die Dimension sind. In diesem Fall  $P = L^d$  wächst mit der Systemlänge. Für lokalisierte Zustände  $P$  bleibt für grosse  $L$  endlich.  $P^{-1}$  kann man als die Rückkehrwahrscheinlichkeit (nach unendlicher Zeit) interpretieren.

### 7.2.3 Lyapunov-Exponent

Wir schreiben das eindimensionale System

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + u_n \psi_n = E \psi_n$$

als eine 2-dimensionale Transformation (transfer matrix)

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - u_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}$$

Iterationen ergeben ein Produkt von Zufallmatrizen.

Ein Produkt von Zahlen (Skalaren) erfüllt den zentralen Grenzsatz. Für ein Produkt von Zufallmatrizen gilt der multiplikative ergodische Satz von Oseledets: Es gibt die  $l \times l$  Grenmatrix

$$\Gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} (Q^{\dagger N} Q^N)^{\frac{1}{2N}}$$

deren  $l$  Eigenwerte reell sind und als  $e^{\gamma_i}$  geschrieben werden können. In unserem Falle sind die Matrizen  $Q$  und  $Q^\dagger$  symmetrisch, deshalb  $\gamma_1 = -\gamma_2$ . Asymptotisch  $\psi_n \sim e^{-\gamma n}$ , deshalb ist die Lokalisierungslänge der inverse Lyapunovexponent  $\gamma = 1/\lambda$ .

Der Lyapunov-Exponent ist von der Energie  $E$  abhängig. Man kann einen Zusammenhang zwischen  $\gamma(E)$  und der Zustandsdichte  $\rho(E)$  feststellen. Wenn wir die Transfer-Matrix von Anfangswerten  $\psi_0 = 0, \psi_1 = 1$  an iterieren, dann ist  $\psi_{N+1}$  ein Polynom der Ordnung  $N$  in  $E$ . Seine Nullstellen sind die Eigenwerte, deshalb

$$\psi_{N+1} = \prod_{\alpha=1}^N (E - E_\alpha)$$

Deshalb  $\ln |\psi_{N+1}(E)| \approx N\gamma(E) = \sum \ln |E - E_\alpha|$ . Wenn wir die Zustandsdichte einführen, erhalten wir

$$\gamma(E) = \frac{1}{N} \sum \ln |E - E_\alpha| = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(e) \ln |E - e| de$$

## 7.3 Diskretes (Anderson) Modell

Unsere Aufgabe ist, den Lyapunov-Exponent des Systems

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = (E - u_n)\psi_n$$

zu finden. Die Methode unten ist für kleine Unordnung  $|u_n|/E \ll 1$  geeignet. Statt der Transfer-Matrix schreiben wir die Gleichung als ein dynamisches System 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n &= x_n & x_{n+1} &= \tilde{x}_n \cos \alpha - \tilde{p}_n \sin \alpha \\ \tilde{p}_n &= p_n + A_n x_n & p_{n+1} &= \tilde{x}_n \sin \alpha + \tilde{p}_n \cos \alpha \end{aligned}$$

Die zweite Transformation ist eine Rotation um den Winkel  $\alpha$ . Wenn wir

$$x_{n-1} = \tilde{x}_{n-1} = x_n \cos \alpha + p_n \sin \alpha$$

(Rückrotation) schreiben und

$$p_n = \frac{x_{n-1} - x_n \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

einsetzen, erhalten wir

$$x_{n+1} = x_n \cos \alpha - \left( \frac{x_{n-1} - x_n \cos \alpha}{\sin \alpha} + A_n x_n \right) \sin \alpha$$

Das ist zu

$$x_{n+1} + x_{n-1} = x_n (2 \cos \alpha - A_n \sin \alpha)$$

äquivalent. Wir sehen, dass für  $E = 2 \cos \alpha$  und  $u_n = A_n \sin \alpha$  die Abbildung zum Anderson-Modell äquivalent ist.

Wir schreiben die lineare Abbildung  $(x_n, p_n) \rightarrow (x_{n+1}, p_{n+1})$  in neuen Variablen  $x = r \sin \theta$ ,  $p = r \cos \theta$ . Dann

$$\begin{aligned} r_{n+1}^2 &= r_n^2 (1 + A_n \sin 2\theta_n + A_n^2 \sin^2 \theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \tilde{\theta}_n - \alpha = \text{arctg}(\cot \theta_n + A_n) - \alpha \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ergibt eine Rauschgetriebene Kreisabbildung, die eine invariante Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(\theta)$  hat. Dann wird der Lyapunovexponent als

$$\gamma = \langle \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \rangle = \frac{1}{2} \langle \ln(1 + A_n \sin 2\theta_n + A_n^2 \sin^2 \theta_n) \rangle$$

geschrieben. Als erste Näherung können wir  $w = \text{const} = 1/2\pi$  einsetzen. Wenn darüber hinaus  $A_n \ll 1$ , dann

$$\gamma \approx \frac{1}{2} \langle A^2 \sin^2 \theta - \frac{A^2}{2} \sin^2 2\theta \rangle = \frac{\langle u_n^2 \rangle}{8 \sin^2 \alpha} = \frac{\langle u_n^2 \rangle}{8(1 - \frac{E^2}{4})}$$

Die Lokalisierungslänge  $\lambda = \gamma^{-1}$  ist im Zonenzentrum  $E = 0$  maximal  $\lambda_{\max} = 8 \langle u_n^2 \rangle^{-1}$ .

## 7.4 Delta-korreliertes Potential

Hier betrachten wir die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

Diese lineare Gleichung 2. Ordnung ist zur Riccati-Gleichung 1. Ordnung für  $z = \psi'/\psi$  äquivalent:

$$z' = \frac{\psi''\psi - \psi'^2}{\psi^2} = -z^2 + U(x) - E$$

Die Variable  $z$  erfüllt somit eine Langevin-Gleichung. Wenn  $\langle U(x)U(x') \rangle = 2\sigma^2\delta(x-x')$  gilt, dann können wir auch die entsprechende Fokker-Planck-Gleichung schreiben. Weil

$$\frac{d\ln\psi}{dx} = \frac{\psi'}{\psi} = z$$

gilt, ist der Lyapunov-Exponent  $\gamma = \langle z \rangle$ .

Man bemerke, dass die Gleichung für  $z$  genau mit der Langevin-Gleichung für Intermitenz übereinstimmt:

$$\dot{x} = -\varepsilon - x^2 + \xi(t)$$

Dabei  $\langle x \rangle = -0.5\langle d\dot{x}/dx \rangle = -0.5\Lambda$ , wobei  $\Lambda$  der Lyapunov-Exponent der Intermitenz ist.

Die Lösung lautet

$$P(z) = \frac{J(E)}{\sigma^2} \exp(-z^3/3\sigma^2 - Ez/\sigma^2) \int_{-\infty}^z \exp(y^3/3\sigma^2 + Ey/\sigma^2) dy$$

wobei

$$J(E) = \frac{1}{\sigma^{2/3}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(\Phi(y) - \Phi(x)) \quad \Phi(x) = x^3/3 + \frac{E}{\sigma^{4/3}}x$$

Der Lyapunov-Exponent ist damit

$$\gamma(E) = \int P(z)z dz$$

Asymptotisch  $\gamma(E) \sim \sqrt{E}$ ,  $E \rightarrow -\infty$  und  $\gamma(E) \sim \sigma^2/4E$ ,  $E \rightarrow \infty$ .

## 7.5 Reflektion von einer ungeordneten Schicht

In der Quantenmechanik wird dieses Problem wie folgendes formuliert. Wir haben ein ungeordnetes Potential

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi \quad 0 < x < L$$

und kein Potential für  $x < 0$  und  $x > L$ . Die Lösung wird in der Form

$$\psi(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}, \quad x < 0 \quad \psi(x) = Te^{ik(x-L)} \quad x > L$$

gesucht ( $k = \sqrt{E}$ ). Hier sind  $R$  und  $T$  die Reflektion- und Durchlasskoeffizienten. Uns interessiert die Grösse  $D(L) = |T|^2$ .

Genau die selbe Gleichung gilt für Wellen (z.B. Licht) in einem ein-dimensionalem ungeordneten Medium. Hier schreibt man üblicherweise

$$u'' + k^2(1 + \varepsilon(x))u = 0$$

Die Randbedingungen sind

$$u(0) = 1 + R \quad \frac{du(0)}{dx} = ik(1 - R) \quad u(L) = T \quad \frac{du(L)}{dx} = ikT$$

Wir führen zwei Lösungen ein:

$$\begin{aligned} y'' + k^2(1 + \varepsilon(x))y &= 0 & y(0) &= 1 & y'(0) &= 0 \\ z'' + k^2(1 + \varepsilon(x))z &= 0 & z(0) &= 0 & z'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Dann

$$u = (1 + R)y + ik(1 - R)z$$

Die Randbedingungen am Rand  $x = L$  sind

$$T = (1 + R)y(L) + ik(1 - R)z(L) \quad ikT = (1 + R)y'(L) + ik(1 - R)z'(L)$$

Darüber hinaus gilt  $|T|^2 + |R|^2 = 1$ . Man löst das Gleichungssystem für  $T$  und erhält

$$T = \frac{(y + ikz)(ikz' - y') - (y' + ikz')(ikz - y)}{ikz' - y' + k^2z + ikz}$$

Wir benutzen

$$\det \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} = 1$$

und erhalten

$$T = \frac{2}{z' + y - y'/ik + kz/i} \quad D(L) = \frac{4}{z'^2 + y^2 + y^2/k^2 + k^2z^2 + 2}$$

Für  $L \rightarrow \infty$  ist  $y, z, y', z' \sim e^{\gamma L}$ . Deshalb  $D(L) \sim e^{-2\gamma L}$ : die Wahrscheinlichkeit, die Schicht zu durchlaufen, ist exponentiell klein.

Obwohl das Feld abnimmt exponentiell, es ist nur ein asymptotisches Gesetz. Es gibt eine endliche Wahrscheinlichkeit, dass irgendwo im Medium das Feld eine gegebene Schwelle überschreitet:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \text{Prob}\{|u(x)| > A\} > 0$$

für jede  $A$ .

# Kapitel 8

## Irrweg in der Zufallsumgebung

Wir betrachten einen Irrweg, wobei die Übergangswahrscheinlichkeiten Zufallszahlen sind:

$$p_{ll'} = A_{l'}\delta_{l,l'+1} + (1 - A_{l'})\delta_{l,l'-1}$$

Hier ist  $A_l$  die Wahrscheinlichkeit eines Schrittes vom  $l$  nach rechts und  $1 - A_l$  ist die Wahrscheinlichkeit eines Schrittes vom  $l$  nach links. Der Fall  $A = 1/2$  entspricht einfachem Polya-Irrweg.

Da wir jetzt zwei Zufallsprozesse haben, müssen wir auch unterschiedlich mitteln: Über Zufallstrajektorien für eine Realisierung  $\omega$  von  $A$  und über verschiedene Realisierungen.

Sei  $Pr\{E|\omega\}$  die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E$  in der Realisierung  $\omega$ . Sei  $Pr\{\Omega\}$  die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisierung irgendwelche Eigenschaft hat, z.B. zur Klasse  $\Omega$  gehört. Sei  $Pr\{E\}$  die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E$  für typische Trajektorie in der typischen Realisierung. Solomon hat gezeigt, dass aus  $Pr\{E|\omega\} = 1$  und  $Pr\{\Omega\} = 1$  folgt  $Pr\{E\} = 1$ .

Wir bezeichnen die Mittelung über Realisierungen von  $A$  als  $\overline{f(A)}$ , und die Ensemble-Mittelung für eine Realisierung als  $\langle \rangle$ .

Der Irrweg wird nichttrivial wenn die Wahrscheinlichkeiten für  $A = 0$  und  $A = 1$  verschwinden (sonst hat man reflektierende Rände).

Sei  $R_\omega$  die Rückkehrwahrscheinlichkeit für eine Realisierung  $\omega$ . Ein Irrweg heisst rekurrent wenn  $Pr\{R_\omega = 1\} = 1$  (für fast alle Realisierungen findet ein Rückkehr mit Wahrscheinlichkeit 1 statt). Ein Irrweg ist links-rekurrent, wenn für alle Links-Abweichungen  $Pr\{R_\omega = 1\} = 1$  und rechts-rekurrent, wenn für alle rechts-Abweichungen  $Pr\{R_\omega = 1\} = 1$ .

Der Solomon-Satz: ein Irrweg ist rechts-rekurrent genau dann, wenn  $\overline{\ln \frac{1-A}{A}} \geq 0$ , ist

links-rekurrent genau dann, wenn  $\overline{\ln \frac{A}{1-A}} \geq 0$  und ist rekurrent genau dann, wenn  $\overline{\ln \frac{A}{1-A}} = 0$ .

Für konkretes Modell  $w(A) = (1-p)\delta(A - [1-a_0]) + p\delta(A - a_0)$  ergibt sich das folgende Diagramm.

Der rekurrente Fall ist besonders nicht-trivial.

Der Sinai-Satz. Sei

$$\overline{\ln \frac{A}{1-A}} = 0 \quad 0 < \sigma^2 = \overline{\ln^2 \frac{A}{1-A}} < \infty$$

Sei  $X_n(\omega)$  die Verschiebung während  $n$  Schritte in der Umgebung  $\omega$ . Dann existiert eine solche Funktion  $m_n(\omega)$ , dass

$$Pr\left\{\left|\frac{X_n(\omega)}{\log^2 n} - m_n(\omega)\right| > \epsilon\right\} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt, wobei die Wahrscheinlichkeit für alle Irrwege, die von 0 in der Umgebung  $\omega$  anfangen, berechnet wird. Das bedeutet, dass die Abweichung  $\sim c \log^2 n$  ist.

Wir betrachten die Größe  $u(l)$  - die Wahrscheinlichkeit, dass der Läufer, der an  $l$  anfängt, erst 0 und nur dann  $m$  besucht;  $0 < l < m$ . Für diese Wahrscheinlichkeit gilt die rekursive Relation

$$u(l) = (1 - A_l)u(l-1) + A_l u(l+1)$$

mit der Randbedingungen  $u(0) = 1$ ,  $u(m) = 0$ . Wir schreiben die rekursive Relation als

$$u(l+1) - u(l) = \frac{1 - A_l}{A_l} [u(l) - u(l-1)]$$

um und iterieren

$$u(l+1) - u(l) = [u(1) - 1] \prod_{j=1}^l \frac{1 - A_j}{A_j}$$

Wenn wir alles summieren, erhalten wir

$$-1 = [u(1) - 1] \sum_{l=0}^{m-1} \prod_{j=1}^l \frac{1 - A_j}{A_j}$$

oder

$$1 - u(1) = \frac{1}{\sum_{l=0}^{m-1} \prod_{j=1}^l \frac{1 - A_j}{A_j}}$$

Aber  $1 - u(1) = U(m)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Irrweg, der in 1 anfängt, zuerst  $m$  erreicht und nur später 0. Man kann das umschreiben

$$U(m) = \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^{m-1} \prod_{j=1}^l \frac{1 - A_j}{A_j}} = \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^{m-1} e^{T_l}}$$

wobei

$$T_l = \sum_{j=1}^l \ln \frac{1 - A_j}{A_j}$$

Aber  $T_l \sim l^{1/2}$  als eine Summe unabhängiger Zufallszahlen. Deshalb

$$U(m) \sim e^{-m^{1/2}}$$

Das bedeutet, das vor dem Erreichen von  $m$  etwa  $e^{m^{1/2}}$  Besuche von 0 stattfinden, also braucht der Läufer etwa  $e^{m^{1/2}}$  Schritte um  $m$  zu erreichen. Nach Einsetzen  $m \approx X$ ,  $n \approx e^{m^{1/2}}$  erhalten wir  $X \sim (\ln n)^2$ .

Golosov-Satz 1: Die Größe  $L = \sigma^2 \frac{X_n}{\ln^2 n}$  hat die universelle Verteilung  $w(L) \sim e^{-\sqrt{2}|L|}$ .

Golosov-Satz 2: In einer Realisierung des Potentials bleibt der Abstand zwischen zwei Teilchen, die von einem Ort starten, endlich.

# Kapitel 9

## Getriebene Oberfläche

### 9.1 Edwards-Wilkenson-Gleichung

Die lineare EW-Gleichung lautet

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \xi(x, t) \quad \langle \xi(x, t) \xi(x', t') \rangle = 2D \delta^d(x - x') \delta(t - t')$$

Diese lineare Gleichung kann auch im Fourier-Raum geschrieben werden

$$\frac{\partial h(k, t)}{\partial t} = -\nu k^2 h(k, t) + \xi(k, t) \quad \langle \xi(k, t) \xi(k', t') \rangle = 2D (2\pi)^d \delta(k + k') \delta(t - t')$$

Wir betrachten den Anfangsbedingungen  $h = 0$  bei  $t = 0$ , dann

$$h(k, t) = \int_0^t \xi(k, \tau) e^{\nu k^2 (\tau - t)} d\tau$$

Die Korrelationsfunktion ist

$$\begin{aligned} \langle h(k, t) h(k', t) \rangle &= \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \langle \xi(k, \tau) \xi(k', \tau') \rangle e^{-2\nu k^2 (\tau - t)} e^{-2\nu k'^2 (\tau' - t)} \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' 2D (2\pi)^d \delta^d(k + k') \delta(\tau - \tau') e^{-2\nu k^2 (\tau - t)} e^{-2\nu k'^2 (\tau' - t)} \\ &= \int_0^t d\tau 2D \delta^d(k + k') e^{-2\nu k^2 (\tau - t)} e^{-2\nu k'^2 (\tau - t)} \\ &= \frac{D}{\nu k^2} (1 - e^{-2\nu k^2 t}) (2\pi)^d \delta^d(k + k') \end{aligned}$$

Die Varianz des Feldes  $w^2 = \langle h^2(x, t) \rangle$  kann als Integral über das Spektrum gerechnet werden:

$$w^2 \sim \int d^d k \frac{D}{\nu k^2} (1 - e^{-2\nu k^2 t}) = A_d \int dk \frac{k^{d-1} D}{\nu k^2} (1 - e^{-2\nu k^2 t})$$

Wir betrachten ein endliches System  $k > 2\pi/L$  und führen auch die Gitterkonstante  $a$  ein. Dann hat das Integral endliche Ränder

$$w^2 = A_d \int_{2\pi/L}^{\pi/a} dk \frac{D}{\nu k^{3-d}} (1 - e^{-2\nu k^2 t})$$

Wir betrachten zuerst den Fall  $d = 1$ . Hier ist die obere Grenze  $\pi/a$  unwichtig, und mit dem Ansatz  $2\nu t k^2 = x^2$  erhalten wir

$$\frac{D}{\nu} \int_{2\pi/L}^{\infty} \frac{dk}{k^2} (1 - e^{-2\nu k^2 t}) = \frac{\sqrt{2t}D}{\sqrt{\nu}} \int_{\sqrt{8\pi^2}}^{\infty} \sqrt{\frac{\nu t}{L^2}} \frac{dx}{x^2} (1 - e^{-x^2}) \sim \frac{DL}{\nu} \sqrt{\frac{\nu t}{L^2}} \int_{\sqrt{8\pi^2}}^{\infty} \sqrt{\frac{\nu t}{L^2}} \frac{dx}{x^2} (1 - e^{-x^2})$$

oder

$$w^2 = \frac{DL}{\nu} f_1^2\left(\frac{\nu t}{L^2}\right)$$

Hier  $f_1(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$ , und  $f_1(x) \rightarrow x^{1/4}$  für  $x \rightarrow 0$ . Diese Formel für  $w$  entspricht dem Family-Vicsek Skalenansatz

$$w \sim L^\alpha f\left(\frac{t}{L^z}\right)$$

Für die 1-dimensionale EW-Gleichung  $\alpha = 1/2$  und  $z = 2$ . Darüber hinaus darf die Varianz für kleine Zeit  $t$  nicht von der Systemlänge  $L$  abhängig sein. Deshalb muss gelten  $f(x) \sim x^\beta$  für  $x \rightarrow 0$ , wobei  $\alpha = z\beta$ . Für die 1-dimensionale EW-Gleichung  $\beta = 1/4$ .

Der Skalenansatz lässt sich anhand einer graphischen Methode überprüfen, wobei in  $\log - \log$ -Koordinaten  $w/L^\alpha$  versus  $t/L^z$  aufgezeichnet wird.

Wir können auch die Varianz in der Dimension  $d$  berechnen:

$$w^2 \sim \int_{2\pi/L}^{\pi/a} \frac{dk}{k^{3-d}} (1 - e^{-2\nu k^2 t}) \sim L^{2-d} \left(\frac{\nu t}{L^2}\right)^{\frac{2-d}{2}} \int_{\frac{2\pi}{L}\sqrt{2\nu t}}^{\frac{\pi}{a}\sqrt{2\nu t}} \frac{dx}{x^{3-d}} (1 - e^{-x^2})$$

Für  $d \neq 2$  erhalten wir

$$w \sim L^{\frac{2-d}{2}} f\left(\frac{\nu t}{L^2}\right)$$

damit  $\alpha = \frac{2-d}{2}$ ,  $z = 2$ ,  $\beta = \frac{2-d}{4}$ . Für  $d = 2$  ergibt sich ein logarithmisches Verhalten

$$w^2(L, t) \sim \frac{D}{4\pi\nu} \left[ \gamma + \ln \frac{2\pi^2 \nu t}{a^2} + \dots \right] \quad a^2 \ll \nu t \ll L^2$$

$$w^2(L, t) \sim \frac{D}{2\pi\nu} \ln \frac{L}{a} \quad \nu t \gg L^2$$

Oft wird auch die Strukturfunktion benutzt, die eigentlich die transformierte Korrelationsfunktion ist:

$$\langle |h(r, t) - h(0, t)|^2 \rangle \sim \int \frac{d^d k}{k^2} \frac{D}{\nu} (1 - e^{-2\nu k^2 t}) [1 - \cos(kr)]$$

Diese Funktion erfüllt den selben Skalenansatz.

## 9.2 KPZ-Gleichung

Die KPZ-Gleichung lautet

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \lambda (\nabla h)^2 + \xi(x, t)$$

Wir betrachten  $x$  als ein Parameter. Wäre dieser Parameter diskret, könnte man schreiben

$$\frac{dh}{dt} = A_i + \xi_i(t)$$

und die Fokker-Planck Gleichung hätte die Form

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial h_i} A_i P + D \sum \frac{\partial^2 P}{\partial h_i^2}$$

Im kontinuierlichen Fall haben wir

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \int dx \frac{\delta}{\delta h} [\nu \nabla^2 h + \lambda (\nabla h)^2] P + D \int dx \frac{\delta^2 P}{\delta h^2}$$

Hier werden die funktionale Ableitungen benutzt, mit folgenden Eigenschaften:

$$\Phi[\phi]$$

ist ein Funktional.

$$\frac{\delta \Phi[\phi]}{\delta \phi(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \Phi[\phi]}{\int_{\Delta t} d\tau \delta \phi(\tau)}$$

ist seine Ableitung, die von  $t$  wie von einem Parameter abhängig ist. Zwei Beispiele:

$$\Phi[\phi] = \int d\tau a(\tau) \phi(\tau) \quad \frac{\delta \Phi[\phi]}{\delta \phi(t)} = a(t)$$

$$\Phi[\phi] = \int dt_1 \int dt_2 B(t_1, t_2) \phi(t_1) \phi(t_2) \quad \frac{\delta \Phi[\phi]}{\delta \phi(t)} = \int dt_1 [B(t_1, t) + B(t, t_1)] \phi(t_1)$$

Die Ableitung wird anhand folgender Regeln berechnet

$$\frac{\delta}{\delta \phi} f(\Phi[\phi]) = \frac{\partial f}{\partial \Phi} \frac{\delta \Phi[\phi]}{\delta \phi(t)}$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi} F_1[\phi] F_2[\phi] = F_1 \frac{\delta F_2[\phi]}{\delta \phi(t)} + F_2 \frac{\delta F_1[\phi]}{\delta \phi(t)}$$

Darüber hinaus gilt

$$\frac{\delta \phi(t_0)}{\delta \phi(t)} = \delta(t - t_0)$$

Wenn

$$\Phi[\phi] = \int d\tau L(\tau, \phi(\tau), \frac{\partial \phi}{\partial \tau})$$

dann

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi[\phi]}{\delta \phi(t)} &= \int d\tau \left[ \frac{\partial L}{\partial \phi} \frac{\delta \phi(\tau)}{\delta \phi(t)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{d}{d\tau} \frac{\delta \phi(\tau)}{\delta \phi(t)} \right] \\ &= \int d\tau \left[ \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{d}{d\tau} \right] \delta(\tau - t) = \left( -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial}{\partial \phi} \right) L \end{aligned}$$

Wir wenden diese Formeln, um die stationäre FP-Gleichung zu lösen. Wir schreiben

$$P = \exp[-a \int_0^L dx \dot{h}^2] = e^{Q[h]} \quad Q = -a \int_0^L dx S \quad S = \dot{h}^2$$

Dann

$$\frac{\delta P}{\delta h} = P \frac{\delta Q}{\delta h} = Pa \frac{d}{dx} \frac{\partial S}{\partial \dot{h}} = 2aP\ddot{h}$$

Wenn  $2aD = \nu$ , verschwinden der erste und der letzte Terme auf der rechten Seite. Weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta h} \dot{h}^2 P &= P \frac{\delta \dot{h}^2}{\delta h} + \dot{h}^2 \frac{\delta P}{\delta h} = P 2\dot{h} \frac{\delta \dot{h}}{\delta h} - 2aP\ddot{h}\dot{h}^2 \\ &= P 2\dot{h} \delta'(x' - x) - 2aP\ddot{h}\dot{h}^2 \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet bei der Integration. Der zweite Term wird durch partielle Integration zu

$$\int dx \ddot{h}\dot{h}^2 = \dot{h}^3 \Big| - 2 \int dx \dot{h}^2 \ddot{h}$$

und verschwindet auch. Das bedeutet, dass die stationäre Lösung

$$P = \exp\left[-\frac{\nu}{2D} \int_0^L dx (\nabla h)^2\right]$$

für die eindimensionale EW- und KPZ-Gleichungen gilt.

# Kapitel 10

## Turbulenz

### 10.1 Skalengesetze

Die turbulente Bewegung einer Flüssigkeit wird mit der Navier-Stokes-Gleichung beschrieben

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Hier sind  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  die Zufallsfunktionen der Zeit und des Raumes. Das Spektrum von Fluktuationen ist sehr breit und erstreckt sich von  $1/L$  bis  $1/\lambda$ . Hier ist  $L$  die äussere Turbulenzskala und  $\lambda$  ist die innere Turbulenzskala.

Die Turbulenz wird durch die Reynoldszahl

$$R = \frac{UL}{\nu}$$

charakterisiert. Diese Zahl kann auch für jede Skala definiert werden:

$$R_l = \frac{v_l l}{\nu}$$

Die Skala, wo  $R \approx 1$  ist, ist genau die innere Skala:

$$R_\lambda = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \approx 1$$

Für  $l < \lambda$  dominiert Viskosität. In der entwickelten Turbulenz  $\lambda \ll L$ . Die Skalen werden wie folgt verteilt:

Der Bereich  $l < \lambda$  ist der Viskositätsbereich, hier dominiert die Dissipation.

Der Bereich  $l \approx L$  ist der Aussenbereich, hier wird die Energie in der Turbulenz gepumpt.

Der Bereich  $\lambda \ll l \ll L$  ist der Inertionsbereich. Hier sind sowohl Dissipation als auch die Energiezufuhr unwichtig. In diesem Bereich wird die Energie in der Richtung kleinen Skalen geflossen.

Der Energiefluss, der der gesamten Energiedissipation gleich ist, wird als mittlere Energiedissipation in der Volumeneinheit pro Messeinheit definiert:

$$\varepsilon = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle = \frac{\nu}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle$$

Die letzte Gleichung folgt aus der NS-Gleichung. Der Fluss  $\varepsilon$  hat die physikalische Dimension  $[l]^2[t]^{-3}$ . Aus den Größen  $U$  und  $L$  kann man nur eine solche Kombination bilden, deshalb

$$\varepsilon \sim \frac{U^3}{L}$$

Die Skalenhypothese von Kolmogorov und Obuchov (1941) sagt, dass auch in ganzem Inertionsbereich  $v_l$  nur von  $l$  und  $\varepsilon$  abhängt. Deshalb

$$v_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$$

Wir setzen diesen Ausdruck in der Reynoldszahl ein und erhalten

$$R_l = \frac{v_l l}{\nu} = \frac{\varepsilon^{1/3} l^{4/3}}{\nu} = \left( \frac{U^3}{L} \right)^{1/3} \frac{l^{4/3}}{\nu} = R \left( \frac{l}{L} \right)^{4/3}$$

Die Bedingung  $R_\lambda = 1$  ergibt dann

$$\lambda \sim \frac{L}{R^{3/4}}$$

Das Kolmogorov-Obuchov-Gesetz kann auch in der spektralen Form geschrieben werden.  $E(k)dk$  ist die kinetische Energie der Masseneinheit im Wellenzahlintervall  $dk$ .  $E(k)$  hat die physikalische Dimension  $[l]^2/[t]^2[l] = [l]^3[t]^{-2}$ . Aus  $\varepsilon = [l]^2[t]^{-3}$  und  $k = [l]^{-1}$  kann nur eine Kombination

$$E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

zusammengestellt werden.

Die Diffusion zweier Teilchen kann auch aus der physikalischen Dimension gewonnen werden:

$$\tau \sim \frac{l^{2/3}}{\varepsilon^{1/3}}$$

wobei  $\tau$  die Zeit der Divergenz bis zur Länge  $l$  ist. Man hat Superdiffusion  $l \sim \tau^{3/2}$ , weil die relative Geschwindigkeit mit  $l$  wächst.

## 10.2 Korrelationstheorie

Der Korrelationstensor 2. Ordnung

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle$$

ist wegen Homogenität nur von der Differenz  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  abhängig. Wegen Isotropie ist er nur vom Betrag von  $r$  abhängig. Die allgemeine Forme solches symmetrisches Tensors ist

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k$$

In Wirklichkeit sind nur zwei Komponenten unabhängig,  $B_{rr}$  und  $B_{tt}$ . Für diese Komponente gilt  $B_{rr} = A + B$ ,  $B_{tt} = A$ ,  $B_{tr} = 0$ . Deshalb

$$B_{ik} = B_{tt}(r)(\delta_{ik} - n_i n_k) + B_{rr}(r)n_i n_k$$

Wir können den Tensor auch anders darstellen:

$$B_{ik} = \langle v_{1i} v_{1k} \rangle + \langle v_{2i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1i} v_{2k} \rangle - \langle v_{2i} v_{1k} \rangle$$

Wegen Symmetrie  $\langle v_{1i} v_{1k} \rangle = \langle v_{2i} v_{2k} \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik}$ . Daraus folgt

$$B_{ik} = \frac{2}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - 2b_{ik} \quad b_{ik} = \langle v_{1i} v_{2k} \rangle$$

Für  $r \rightarrow \infty$  strebt  $b$  gegen Null.

Die Inkompressibilität gibt weitere Zusammenhänge zwischen verschiedenen Komponenten des Tensors.

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2 \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_{ik}} = -2 \langle v_{1k} \frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}} \rangle = 0$$

Da der Tensor  $B_{ik}$  nur von  $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$  abhängig ist, ist die Ableitung nach  $x_{2k}$  zur Ableitung nach  $x_k$  äquivalent. Deshalb

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} [B_{tt}(r)(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}) + B_{rr} \frac{x_i x_k}{r^2}] \\ &= B'_{rr} \frac{x_k}{r} (\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}) + B_{tt} (-\frac{x_i}{r^2} + \frac{x_i x_k^2}{2r^4}) + B'_{rr} \frac{x_k}{r} (\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}) + B_{rr} (-\frac{x_i}{r^2} + \frac{x_i x_k^2}{2r^4}) \\ &= \frac{x_i}{r} [B'_{tt} - \frac{B_{tt} - B_{rr}}{r}] + \frac{x_i x_k^2}{r^3} [-B'_{tt} + B'_{rr} + \frac{B_{tt} - B_{rr}}{r}] \end{aligned}$$

Das ist zu

$$B'_{tt} = \frac{B_{tt} - B_{rr}}{r} \quad B'_{rr} = \frac{B_{rr} - B_{tt}}{2r} + B'_{tt} = \frac{B_{tt} - B_{rr}}{2r}$$

äquivalent. Die letzte Gleichung kann als

$$B_{tt} = 2rB'_{rr} + B_{rr} = \frac{1}{2r}(r^2B_{rr})'$$

umgeschrieben werden. Wenn  $v_r \sim r^{1/3}$ , dann  $B_{rr} = Cr^{2/3}$  und

$$B_{tt} = \frac{C}{2r}(r^{8/3})' = \frac{4}{3}B_{rr}$$

Wenn  $r < \lambda$ , dann  $v_r \sim r$  und  $B_{tt} = 2B_{rr}$ .

### 10.3 Spektrale Theorie

Die Fourier-Transformationen der Korrelationsfunktionen sind die Spektren  $B_{ik}(\vec{k})$ ,  $b_{ik}(\vec{k})$ . Aus dem Zusammenhang zwischen Korrelationsfunktionen folgt

$$B_{ik}(\vec{k}) = \frac{2}{3}\delta(\vec{k})(2\pi)^3 - 2b_{ik}(\vec{k})$$

Das Spektrum  $b_{ik}(\vec{k})$  ist die entscheidende Größe. Aus der Inkompressibilitätsbedingung  $k_i b_{ik}(\vec{k})$ , aus der Isotropie und der Symmetrie folgt

$$b_{ik} = F(k)\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right)$$

mit der Funktion  $F(k)$ . Die Gesamtenergie kann als Integral

$$\int_V \frac{1}{2}\langle v^2 \rangle d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int_V b_{ii}(r) d^3\vec{r} = \int_K F(k) d^3\vec{k} = \int E(k) dk$$

geschrieben werden, wo  $E$  die spektrale Energiedichte ist. Deshalb

$$E(k) = 4\pi k^2 F(k) \quad b_{ik}(\vec{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right)$$

Die NS-Gleichung kann auch in der spektralen Form geschrieben werden

$$\frac{dv_i(\vec{k})}{dt} + \int d\vec{p} v_k(\vec{k} - \vec{p}) i p_k v_i(\vec{p}) = -k^2 v_i$$

(wobei der Druck-Term verschwindet, weil wir die Projektion auf der Menge aller Vektorfelder durchführen, die Divergenz Null haben). Mit Berücksichtigung, dass

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = \frac{1}{2\pi k^2} E(k)$$

gilt, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi k^2} \frac{dE(k)}{dt} = -2\nu k^2 \frac{1}{2\pi k^2} E(k) - 2Im \int d\vec{p} \langle v_i(-\vec{k}) v_k(\vec{k} - \vec{p}) p_k v_i(\vec{p}) \rangle$$

oder

$$\frac{dE}{dt} + 2\nu k^2 E = -4\pi k^2 Im \left( \sum_{lm} \int d\vec{p} p_l \langle v_l(\vec{k} - \vec{p}) v_m(\vec{p}) v_m(-\vec{k}) \rangle \right)$$

Der Term auf der rechten Seite  $T(k)$  beschreibt den Energiefluss. Er wird durch den Tensor 3. Ordnung dargestellt. Die Gleichung für diesen Tensor beinhaltet den Tensor 4. Ordnung usw.

Hier wir zeigen, wie das Kolmogorov-Obuchov-Gesetz aus dieser Form erhalten werden kann (Heisenberg, 1948). Wir integrieren die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_0^k dq E(q) = -2\nu \int_0^k dq q^2 E(q) + \int_0^k dq T(q)$$

Auf der linken Seite steht die Energiedissipationsgeschwindigkeit  $-\varepsilon$  (weil die Energie in größten Skalen gespeichert ist). Den letzten Term schreiben wir als effektive Dissipation um

$$\int_0^k dq T(q) = -2\nu_T(k) \int_0^k dq q^2 E(q)$$

damit

$$\varepsilon = 2(\nu + \nu_T(k)) \int_0^k dq q^2 E(q)$$

Heisenberg hat angenommen, dass  $\nu_T(k)$  nur von  $q > k$  abhängig ist. Aus der Dimension ( $\nu = [l]^2[t]^{-1}$ ,  $E = [l]^3[t]^{-2}$ ) folgt

$$\nu_T \approx A \int_k^\infty \sqrt{E} q^{-3/2} dq$$

Im Inertionsintervall  $\nu \approx 0$  und wir erhalten

$$\varepsilon \approx A \int_k^\infty \sqrt{E} q^{-3/2} dq \int_0^k dq q^2 E(q)$$

Unter Annahme  $E \sim \varepsilon^{2/3} k^{-a}$  erhalten wir  $k = 5/3$ .

Die Kolmogorov-Relation ist eine exakte Relation für den Tensor 3. Ordnung:

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r$$