Betrachte nun zwei Ereignismengen X', X'' mit N', N'' Ereignissen, mit kombinierten Ereignissen (α, β) mit Wahrsch. $p_{\alpha\beta}$. Statistische Unabhängigkeit

$\Rightarrow p_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta$.

Wir fordern, dass das Informationsdefizit bei unabhängigen Ereignissen additiv sein soll:

$I_{\alpha\beta} = I_\alpha + I_\beta$

$\Rightarrow I_\alpha = k \log U_\alpha = -k \log p_\alpha$.

Wir definieren nun das mittlere Informationsdefizit (Shannonsche Informationsentropie):

$$S(X) = \bar{I} = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha I_\alpha = -k \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \log p_\alpha$$

Tritt ein Ereignis mit absoluter Sicherheit auf, so $S(X) = 0$ (Bem: $\lim_{x\to 0} x \log x = 0$).

Additivität: $S(X) = -k \sum_{(\alpha,\beta)}^{(N',N'')} p_{\alpha\beta} \log p_{\alpha\beta} = -k \sum p_\alpha p_\beta \log(p_\alpha p_\beta)$

$$= -k \left(\sum p_\alpha p_\beta \log p_\alpha + \sum p_\alpha p_\beta \log p_\beta \right)$$

$$= -k \sum_\alpha p_\alpha \log p_\alpha - k \sum_\beta p_\beta \log p_\beta = S(X') + S(X'') \ \square$$

Sind die Ereignisse nicht unabhängig, arbeite wir mit bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$p_{\alpha\beta} = p_{\alpha|\beta} \, p_\beta = p_{\beta|\alpha} \, p_\alpha \qquad (\alpha, \beta \text{ \underline{sind} eingetreten!})$$

Da $\sum_{\alpha=1}^{N'} p_{\alpha|\beta} = 1 \quad \forall \beta = 1, 2, \dots, N''$

$$\Rightarrow S(X) = -k \sum_{(\alpha,\beta)}^{(N',N'')} p_{\alpha\beta} \log p_{\alpha\beta} = -k \sum_{(\alpha,\beta)}^{(N',N'')} p_{\alpha|\beta} \, p_\beta \log(p_{\alpha|\beta} \, p_\beta)$$

$$= -k \sum_\beta p_\beta \sum_\alpha p_{\alpha|\beta} \log p_{\alpha|\beta} + \underbrace{\sum_\beta p_\beta \log p_\beta}_{S(X'')} \underbrace{\sum_\alpha p_{\alpha|\beta}}_{=1}$$

Mittelwert der Realisierungen der Ereignisse β des Satzes X''

$$= -k \sum_\beta^{N''} p_\beta \, S(X'_\beta) + S(X'') \quad \text{mit} \quad S(X'_\beta) = -k \sum_\alpha^{N'} p_{\alpha|\beta} \log p_{\alpha|\beta}$$