Mit dem Projektionsoperator $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ auf den Zustand ψ lässt sich der Dichteoperator umschreiben zu

$$\hat{\varrho} = \sum_i p^{(i)} \hat{P}_{\psi^{(i)}}$$

Ist $\hat{\varrho} = \hat{P}_{\psi^{(j)}}$: reiner Zustand, sonst gemischter Zustand. Im reinen Zustand haben wir die max. mögliche Information über das System ($p^{(j)} = 1$).

Allgemein $\underline{\underline{\mathrm{Sp}\, \hat{P}_{\psi^{(i)}}}} = \sum_n \langle n|\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}|n\rangle = \sum_n \langle\psi^{(i)}|n\rangle\langle n|\psi^{(i)}\rangle = \langle\psi^{(i)}|\psi^{(i)}\rangle = \underline{\underline{1}}$

aufgrund der Vollständigkeit der Basis.

Damit wird auch wieder die Norm $\mathrm{Sp}\, \hat{\varrho} = \sum_i p^{(i)} \mathrm{Sp}\, \hat{P}_{\psi^{(i)}} = \sum_i p^{(i)} = 1.$

Da $\hat{P}^2_{\psi^{(i)}} = \hat{P}_{\psi^{(i)}}$ haben wir einen reinen Zustand, wenn $\underline{\underline{\hat{\varrho}^2 = \hat{\varrho}, \text{ also } \mathrm{Sp}\, \hat{\varrho}^2 = 1.}}$

Im gemischten Zustand $\hat{\varrho}^2 = \sum_i \sum_j p^{(i)} p^{(j)} \hat{P}_{\psi^{(i)}} \hat{P}_{\psi^{(j)}} \neq \hat{\varrho}$

$$\Rightarrow \mathrm{Sp}\, \hat{\varrho}^2 = \sum_n \sum_{i,j} p^{(i)} p^{(j)} \langle n|\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}|\psi^{(j)}\rangle\langle\psi^{(j)}|n\rangle$$

$$= \sum_{i,j} p^{(i)} p^{(j)} \langle\psi^{(i)}|\psi^{(j)}\rangle \sum_n \langle\psi^{(j)}|n\rangle\langle n|\psi^{(i)}\rangle = \sum_{i,j} p^{(i)} p^{(j)} \langle\psi^{(i)}|\psi^{(j)}\rangle\langle\psi^{(j)}|\psi^{(i)}\rangle$$

$$= \sum_{i,j} p^{(i)} p^{(j)} \underbrace{|\langle\psi^{(i)}|\psi^{(j)}\rangle|^2}_{< 1 \text{ für } i \neq j}$$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}\, \hat{\varrho}^2 < \sum_{i,j} p^{(i)} p^{(j)} = 1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{im gemischten Zustand } \mathrm{Sp}\, \hat{\varrho}^2 < \mathrm{Sp}\, \hat{\varrho} = 1.}}$

<u>Eigenschaften von $\hat{\varrho}$:</u>

$\hat{\varrho}^\dagger = \hat{\varrho}$ aufgrund Def. von $\hat{\varrho}$

$\mathrm{Sp}\, \hat{\varrho} = 1$ Norm. $\mathrm{Sp}\, \hat{\varrho}^2 = 1$ im reinen, $\mathrm{Sp}\, \hat{\varrho}^2 < 1$ im gemischten Zustand

$\hat{\varrho}$ ist positiv definit, also $\langle\psi|\hat{\varrho}|\psi\rangle \geq 0 \;\forall\; |\psi\rangle$.