Übungsaufgaben zur Elektrodynamik[2]

20 Punkte

1. Hertz'scher Dipol

10 Punkte

a) Der mathematische Dipol hat die Ladungsdichte

$$\varrho(\vec{r},t) = -(\vec{p}(t)\cdot\nabla)\delta(\vec{r}).$$

Motivieren Sie die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{d\vec{p}}{dt}\,\delta(\vec{r})$$

des mathematischen Dipols.

b) Zeigen Sie, dass das durch den mathematischen Dipol erzeugte Vektorpotential $\vec{A}$ durch

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{|\vec{x}|}$$

und das skalare Potential ϕ durch

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{c|\vec{x}|^2} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}_{\text{ret}}}{|\vec{x}|^3}\right\}$$

gegeben ist, wobei $\dot{\vec{p}}_{\text{ret}} = \dot{\vec{p}}(t-|\vec{x}|/c)$.

c) Berechnen Sie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und zeigen Sie, dass in der Fernfeldnäherung

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\vec{e}_r\times\left(\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}\times\vec{e}_r\right)}{|\vec{x}|}$$

und

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}\times\vec{e}_r}{c|\vec{x}|}$$

gilt. Zeigen Sie auch, dass $\vec{e}_r$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ein orthogonales Rechtssystem bilden.

d) Berechnen Sie die Energiedichte u und den Poyntingvektor $\vec{S}$ des elektromagnetischen Feldes in der Fernfeldnäherung. Zeigen Sie, dass

$$\vec{S}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\,\frac{|\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}\times\vec{e}_r|^2}{|\vec{x}|^2}$$

gilt. Drücken Sie $\vec{S}$ durch u aus und stellen Sie $\vec{p}$, $\vec{S}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einer Skizze an verschiedenen Raumpunkten dar.

[1] udo.schwarz@uni-potsdam.de
[2] http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2018WSEDynamik/2018WSEDynanik.html

e) Zeigen Sie, dass die abgestrahlte Leistung durch eine Kugel vom Radius r

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{2}{3}\ddot{\vec{p}}^{\,2}(t - r/c)$$

ist.

2. Herleitung der Lorentztransformation $\boxed{\textbf{10 Punkte}}$

Ein und dasselbe Ereignis werde durch zwei verschiedene Koordinatensysteme $(ct, \vec{x})^T \in$S und $(ct', \vec{x}')^T \in$S' beschrieben, die zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ zusammenfallen. S' bewege sich längs der positiven x-Achse des Systems S mit der Geschwindigkeit v. Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ gehe vom gemeinsamen Ursprung ein Lichtblitz aus. Für die jeweilige Kugel der Lichtfront gilt $c^2t^2 = \vec{x}^T \cdot \vec{x}$ und $c^2t'^2 = \vec{x}'^T \cdot \vec{x}'$. Finden Sie die lineare Transformation $x' = Ax + Bct$ und $ct' = Cx + Dct$ mit $y' = y$ und $z' = z$ oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass gilt $D^2 - B^2 = 1$.
Identifizieren Sie diese Bedingung mit $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$.

a] Finden Sie die Beziehung zwischen A und C.

b] Wie lautet die Transformationsmatrix?

c] Zeigen Sie $\cosh\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

d] Zeigen Sie, dass die Beziehungen $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \cosh\phi$ und somit auch $\sinh\phi = \beta\gamma$ mit $\beta = \dfrac{v}{c}$ gelten.

e] Zeigen Sie, dass somit auch die bekannten Beziehungen $t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)$ und $x' = \gamma\,(x - v\,t)$ gelten.