

W 1 Deterministisches Chaos[§]

Die Gesetze der klassischen Physik sind deterministisch, d.h. dynamische Systeme werden durch Bewegungsdifferentialgleichungen modelliert, die eine eindeutige Vorschrift zur Berechnung der zeitlichen Systementwicklung aus einem Anfangszustand darstellen. Trotz dieser Determiniertheit zeigt die numerische Berechnung der Bahnkurve oder die Beobachtung z.B. eines gekickten Rotationspendels, dass insbesondere bei größeren Schwingungsamplituden die Pendelbewegung außerordentlich komplex und unregelmäßig verläuft [8, 9]. Obwohl durch die deterministische Dynamik eindeutig vorherbestimmt, ist es praktisch nicht mehr möglich, das Verhalten des Systems mittelfristig vorauszusagen, denn schon kleinste Veränderungen der Anfangsbedingungen (infinitesimale Störungen) führen schnell zu völlig verschiedenen Trajektorien. Die Dynamik solcher Systeme erscheint ungeordnet, *chaotisch*. Das starke Kausalitätsprinzip, wonach ähnliche Ursachen auch ähnliche Wirkungen haben, wird offensichtlich verletzt. Dies eröffnet eine völlig neue Sichtweise zur Beurteilung dynamischer Prozesse. Als populäre Metapher für die extrem sensitive Abhängigkeit der chaotischen Dynamik von deren Anfangsbedingungen hat der Meteorologe E.N. Lorenz (1917-2008) als einen denkbaren Vorgang den *Schmetterlingseffekt* genannt, wonach schon der Flügelschlag eines Schmetterlings an einem Ort u. U. einen Tornado an einem anderen Ort auslösen kann.

Chaotisches Verhalten wird durch die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen verursacht. Chaos ist mithin untrennbar mit Nichtlinearität verbunden und Nichtlinearität ist fundamental für das gesamte Naturgeschehen. Doch weil im allgemeinen die analytische Integration eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems mit enormen mathematischen Problemen verbunden ist, wurde Nichtlinearität lange Zeit wie ein Ärgernis verdrängt oder als Ausnahme empfunden. Man beschränkte sich auf die Untersuchung der wenigen nichtlinearen Bewegungsprobleme, die sich in hinreichender Näherung durch eine lineare Differentialgleichung beschreiben lassen.

[§]Korrekturtipps und Verbesserungsvorschläge werden dankbar entgegengenommen. Bitte an udo.schwarz@uni-potsdam.de senden. Zur Vertiefung des Themas besuchen Sie bitte das Wahlpflichtmodul Nichtlineare Dynamik im 5. und 6. Semester der Bachelor-Ausbildung und im 1. und 2. Semester der Master-Ausbildung.

Erst als durch die rasante Entwicklung der Computer auch eine leistungsstarke Rechen-technik zur Verfügung stand, konnte auch die Dynamik nichtlinearer Systeme genauer analysiert werden. Dabei wurde schnell klar, dass Nichtlinearität statt einer "Ausnahme" der eigentlich viel interessantere und bedeutungsvollere Normalfall ist. Auch ist Chaos nicht einfach mit Unordnung oder Regellosigkeit gleichzusetzen. An die Stelle von Gleichförmigkeit oder Periodizität treten andere Ordnungsbegriffe, die eng mit Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz und Universalität verbunden sind.

Im vorliegenden Experiment ist ein spezieller elektrischer Schwingkreis (Chua-System) mit veränderlicher Steuerspannung U_C (Kontrollparameter des Systems) zu untersuchen. Dabei kann der zeitliche Verlauf der Spannung im Schwingkreis als Funktion der Steuerspannung U_C und insbesondere deren Entwicklung über das typische Bifurkationsszenario ins Chaos verfolgt werden. Für jeden Schwingungszustand lassen sich die Zeitverläufe der Spannungen digital registrieren und damit das Frequenzspektrum und der Phasenraum darstellen.

1 Aufgabenstellung

1. Unter LabVIEW ist auf der Basis vorhandener Bausteine (VI = Virtuelle Instrumente) im Zusammenhang mit einer Multifunktionskarte ein Programm zur Steuerung, Messwerterfassung, -darstellung und Datenspeicherung zu erstellen.
2. Die nichtlineare Strom-Spannungs-Kennlinie der Chua-Diode ist aufzunehmen.
3. Das Zeitverhalten der Schwingschaltung ist als Funktion des Steuerparameters (Steuerspannung an den Kapazitätsdioden) zu registrieren. Dabei ist die Schwingung über mehrere typische Entwicklungsstadien in den chaotischen Bereich zu steuern.
4. Aus den Messkurven der Aufgabe 3 sind
 - a) das Feigenbaum-Diagramm zu konstruieren,
 - b) die Feigenbaum-Konstante abzuschätzen und
 - c) für jede charakteristische Entwicklungsstufe das Zeitverhalten, die Bahnprojektion der Schwingung auf die zweidimensionale - Ebene des Phasenraums sowie das Frequenzspektrum darzustellen und
 - d) die Abhängigkeit der Grundfrequenz vom Steuerparameter zu veranschaulichen.
5. Für das Standard-Beispiel unimodaler iterierter Abbildungen [8, 7, 2, 4, 6, 9, 10], für die logistische Abbildung, siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map,

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad \text{mit} \quad a \in (0, 4], \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

sind das Bifurkationsdiagramm $x^*(a)$, wobei x^* Punkte des Attraktors sind, und die Ljapunov-Exponenten $\lambda(a)$ zu berechnen und zu diskutieren.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Der Chua-Schwingkreis

Der Chua-Oszillator (Abb. 1) ist ein einfaches elektronisches System, das die Hauptphänomene der Chaos-Theorie experimentell zugänglich macht. Das System besteht aus fünf linearen Elementen und einem nichtlinearen Element, der sog. Chua-Diode.

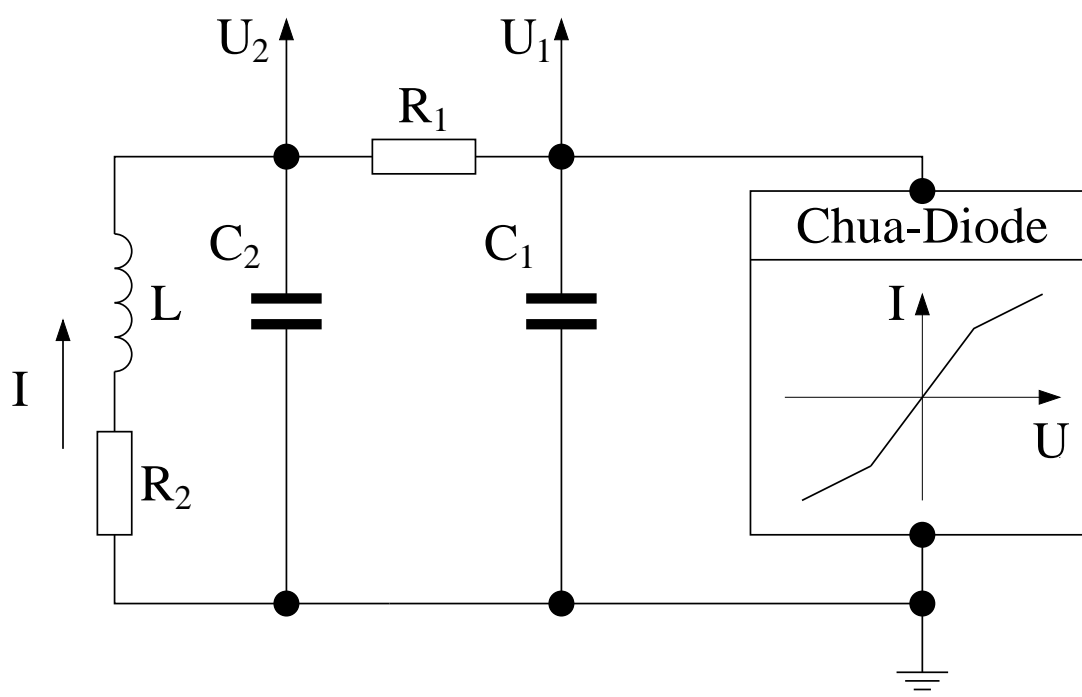


Abbildung 1: Chua-Oszillator

Der Chua-Oszillator lässt sich durch ein nichtlineares Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left[\frac{U_2 - U_1}{R_1} - f(U_1) \right], \\ \frac{dU_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{U_1 - U_2}{R_1} + I \right), \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{L} (U_2 + R_2 I) \end{aligned}$$

beschreiben. Die Funktion $f(U)$ charakterisiert die nichtlineare Strom-Spannungs-Kennlinie der Chua-Diode. In dimensionsfreier Form lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned}$$

wobei $h(x)$ eine nichtlineare Funktion ist. α , β , und γ sind Konstanten.

Der im Versuch untersuchte Schwingkreis wird in Abb. 2 gezeigt. Der Schwingkreis unterscheidet sich vom Standard-Chua-System durch den zusätzlichen Widerstand R_3 und die

Kapazitätsdiode C_D . Der aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C_2 bestehende Schwingkreis wird durch den eingerahmten aktiven Schaltungsteil, die Chua-Diode, angeregt. An die Chua-Diode wird die Arbeitsspannung U_A angelegt. Infolge der nichtlinearen Kennlinie der Chua-Diode verläuft die Schwingung in einem Doppel-Mulden-Potenzial, das bei kleinen Schwingungsamplituden (starke Dämpfung) durch das parabelförmige Potenzial des harmonischen (d.h. linearen) Oszillators angenähert werden kann. Mittels der Kapazität C_1 lässt sich die Schwingungsdämpfung beeinflussen. Hierzu liegt in Reihe zu C_1 eine Kapazitätsdiode, deren Kapazität durch die äußere Spannung U_C variierbar ist. Mit wachsender Kapazität C_1 wirkt diese zunehmend als Kurzschlussbrücke, wodurch die Schwingung zunehmend gedämpft wird. Der Dämpfungswiderstand R_1 entkoppelt C_2 von C_1 und ließe sich ebenfalls zur Schwingungsdämpfung nutzen.

In Abhängigkeit von der Steuerspannung (d. h. von C_D) beobachtet man vier unterschiedliche Zustände: Keine Schwingungen (Ruhezustand, der wie auch alle anderen Regimes des Chua-Oszillators, von elektronischem Rauschen überlagert ist), periodische Schwingungen und chaotische Schwingungen (2 Typen). Das entspricht der Existenz eines Fixpunktes, von Grenzzyklen bzw. chaotischen One-Scroll- und Double-Scroll-Attraktoren im Phasenraum des Systems.

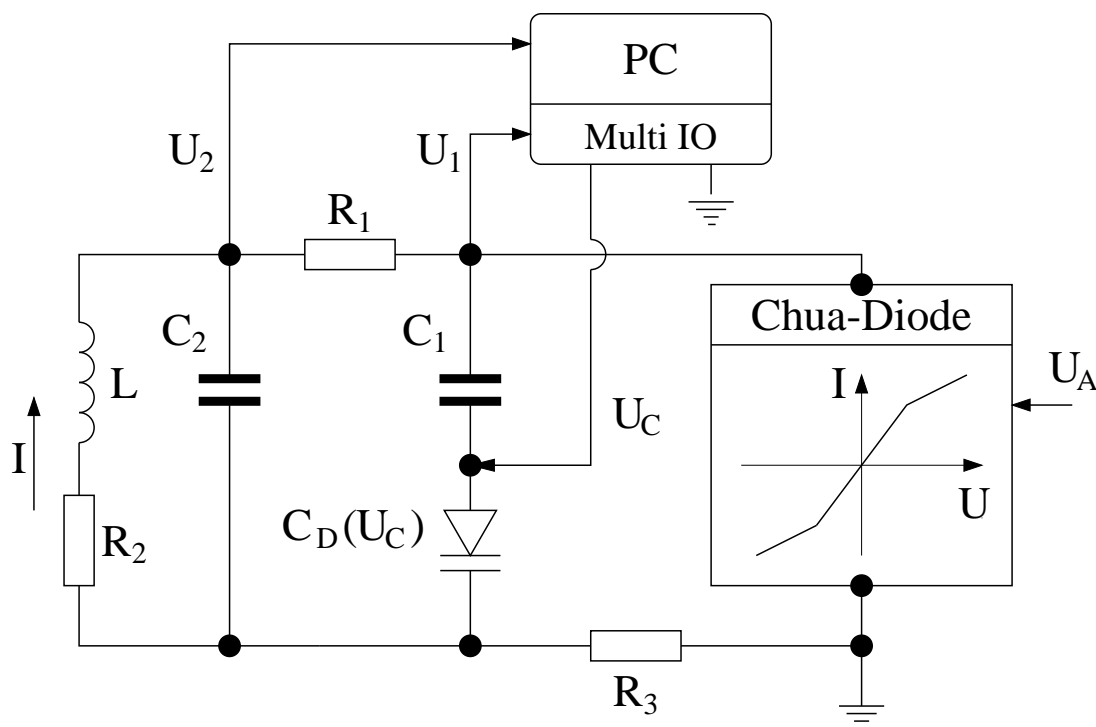


Abbildung 2: Schema des Versuches. Der Chua-Oszillator wird durch den Computer gesteuert und die Spannungen U_1 und U_2 werden gemessen und in digitaler Form im Computer gespeichert.

2.2 Darstellung der chaotischen Bewegung

2.2.1 Darstellung im Feigenbaum-Diagramm

Der Weg ins Chaos über eine Bifurkationskaskade wird als Bifurkationsszenario bezeichnet. Dabei wird ein Kontrollparameter oder Steuerparameter (bei der Chua-Schwingschaltung U_C) kontinuierlich erhöht. Bei $U_C = U_{C1}$ wird der Übergang vom Fixpunkt zum Grenzyklus beobachtet. Bei $U_C = U_{C2}$ findet die erste Periodenverdopplung statt. Mit wachsendem U_C werden in zunehmend kürzeren Abständen immer mehr Bifurkationen beobachtet, bis die Schwingung schließlich bei $U_C = U_{C\infty}$ in eine chaotische Bewegung übergeht. Die Verzweigungspunkte ($U_{C2}, U_{C4} \dots$) lassen sich bequem aus dem Feigenbaum - Diagramm dieser Entwicklung ablesen. Dazu werden die beobachteten Schwingungsamplituden der Grenzyklen über dem Steuerparameter U_C aufgetragen.

2.2.2 Darstellung im Phasenraum

Nach dem Einschwingen ergibt sich für die Grundschiwingung als Attraktor ein stabiler Grenzyklus, der sich im Phasenraum dieses Bewegungsvorganges und in der Projektion auf die U_1 - U_2 -Ebene als eine in sich geschlossene Kurve zeigt. Die Abweichung von der Ellipsen-Form zeigt, dass keine harmonische Schwingung vorliegt. Die Bifurkationen offenbaren sich recht eindrucksvoll in einer mit U_C zunehmenden Aufspaltung der Phasenkurve zu einer zweifachen, vierfachen bzw. achtfachen Schleifenbahn usw., bis bei genügend hohem U_C das Überschwingen in die zweite Potenzial-Mulde und schließlich chaotisches Verhalten zu beobachten ist. Die nun nicht mehr in sich geschlossenen Bahnkurven zeigen dennoch interessante Muster, die darauf hindeuten, dass auch das Chaos von bestimmten Ordnungsprinzipien beherrscht wird. Dass die Bahn sich mehrfach schneidet bedeutet keinen Widerspruch zur Determiniertheit der Bewegung, denn die dreidimensionale Trajektorie wird auf eine Ebene projiziert. Bei kontinuierlichen Systemen sind mindestens drei effektive Freiheitsgrade für deterministisch-chaotisches Verhalten erforderlich.

2.2.3 Darstellung im Frequenzspektrum (Spektrale Leistungsdichte)

Die mit jeder Bifurkation einhergehende Periodenverdopplung lässt sich auch eindrucksvoll durch das Fourier-Spektrum der Schwingung nachweisen: Nach jeder Bifurkation taucht ein neuer Peak bei der halben Vorgängerfrequenz auf. Informieren Sie sich bei Wikipedia zu folgenden Begriffen: spektrale Leistungsdichte, Periodogramm, Leistungs-Spektrum, Power-Spektrum.

2.2.4 Die Dynamik der logistischen Abbildung

Überraschenderweise zeigen einige diskrete Abbildungen ein ganz ähnliches Bifurkationsszenario wie physikalische Systeme. Deshalb wurde das Studium des Feigenbaum-Diagramms der wohl bekanntesten diskreten Abbildung, der logistischen Abbildung (eingeführt in 1845 bei Verhulst für die Beschreibung der Populationsdynamik. Siehe: http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map), in das vorstehende Experiment mit einbezogen. Die Ähnlichkeit des Verhaltens von kontinuierlichen Systemen und iterierten Abbildungen ist

nicht zufällig: Man kann beweisen, dass die Dynamik der Signalamplituden (maximalen Werten) des Chua-Systems annähernd durch eine eindimensionale Abbildung beschrieben wird.

3 Messverfahren

Die Experimentsteuerung und Datenerfassung erfolgt über eine Multifunktionskarte 6024 der Firma National Instruments. Diese Karte verfügt über analoge und digitale Ein- und Ausgänge sowie Zähl-Kanäle. Für die Kommunikation mit der Karte wird das Softwarepaket LabVIEW (NI) verwendet, nachdem die Kanäle der Karte softwaremäßig konfiguriert worden sind. Die Programmierung in LabVIEW bedient sich grafischer Symbole. Damit ist es möglich, ohne spezielle Programmiererfahrung nach kurzer Einarbeitung erste Prozessabläufe zu programmieren. LabVIEW verwendet das vertraute Modell der grafischen Blockschaltbilder. Ein Programm-Modul wird als virtuelles Instrument (VI) bezeichnet, dessen Aussehen und Funktionalität sich an einem realen Instrument orientiert. Mit LabVIEW kann man wissenschaftliche Applikationen lösen, ohne sich dabei mit Syntax und Semantik einer Text orientierten Programmiersprache auseinandersetzen zu müssen. Die Möglichkeit, Prozesse und Algorithmen durch Diagramme darzustellen, erlaubt dem Anwender, seine Ideen und Aufgaben in einer sehr natürlichen und intuitiven Art zu veranschaulichen. Dem Einsteiger wird für den Versuch eine Bibliothek von VIs, mit denen eine Programmierung in einer Ebene möglich ist, bereitgestellt.

4 Tipps zur Versuchsdurchführung und -auswertung

Zur Erinnerung für die LabVIEW-Handhabung wird das Online-Tutorial [5] empfohlen. Als weiterführende Literatur stehen die Quellen [1,2] in der Handbibliothek zur Verfügung.

Verwenden Sie das virtuelle Instrument (VI) "Kennlinie", um die U - I -Kennlinie aufzunehmen. Dazu müssen Sie die Schaltung umbauen (s. Abb. 2), d.h., die Steuerspannung U_C auf die Chua-Diode legen und die Spannung $U_3 = R_3 I$ messen. Überlegen Sie, wie man an der aufgebauten Schaltung die U - I -Kennlinie der Diode aufnehmen kann. Die Kennlinie ist abzuspeichern. Die Bereiche der Kennlinie sind quantitativ auszuwerten.

Unter Verwendung der im Palettensatz "Chaos" bereitgestellten virtuellen Instrumente finden Sie ein Steuer- und Mess-Programm, das folgende Aufgaben erfüllt:

- kontinuierliche Wiederholung der Messung bis zum manuellen Abbruch
- Initialisierung der Analog-Input-Funktion (AI-Funktion) mit Eingabe der Geräte-nummer "1", der Namen der Messkanäle, Bereitstellung einer maximalen Speichertiefe von 100 000 Punkten,
- Start der AI-Messung für eine einzugebende aktuelle Speichertiefe (Stichprobenumfang, Anzahl der Datenpunkte pro Messung) mit einer zuvor gewählten Abtastrate (Abtastfrequenz).

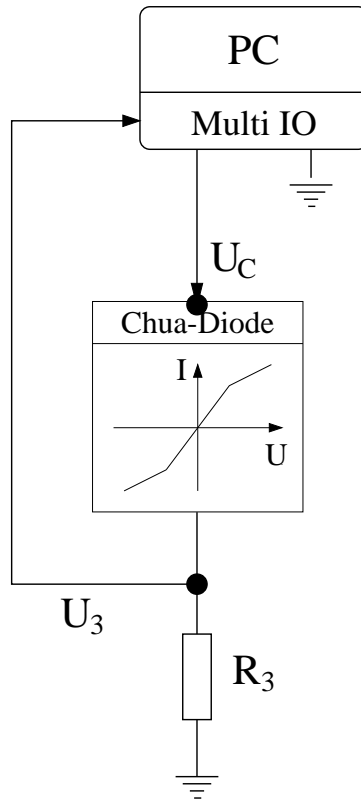


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der U - I -Kennlinie der Chua-Diode

- Wiederholte Auslesung des Messwert-Speichers und nachfolgende Verarbeitung der Werte
- Grafische Darstellung der zeitlichen Spannungsverläufe
- Aufarbeitung des Daten-Arrays in a) zwei eindimensionale Arrays zur Verarbeitung durch diskrete Fourier-Transformation und Anzeige des Frequenzspektrums und b) in ein Cluster zur Phasenraum-Darstellung
- gleichzeitig während der Routine variable manuelle Eingabe des Wertes für die Analog-Output-Funktion
- Speicherung der aktuellen Messdaten als ASCII-File nach Abbruch der Routine. Der Name der zu speichernden Messreihe sollte zweckmäßigerweise die Steuerspannung und die Abtastfrequenz enthalten.

Für eine günstige Wahl der Samplingrate wiederholen Sie das Thema diskrete Fourier-Transformation und Frequenzanalyse. *Frage: Was besagt das Abtast-Theorem?*

Die Steuerspannung U_C wird langsam erhöht, bis U_1 bzw. U_2 einen periodischen Spannungsverlauf zeigen. Durch weiteres vorsichtiges Erhöhen des Steuerparameters U_C gelangt man über eine Folge von Bifurkationen zu Grenzyklen mit zunehmender Periodenlänge und schließlich zum Chaos. Insbesondere sind die Bifurkationspunkte möglichst genau zu ermitteln. Zusätzlich sind für ausgewählte Steuerparameter zwischen den Bifurkationspunkten Messungen mit einer solchen Samplingrate zu registrieren, die in der anschließenden Auswertung die Bestimmung der auftretenden Schwingungsamplituden zulassen.

Zu jedem Datensatz sind die Werte der Steuerspannung und der Samplingrate (zur Reproduktion der Zeitachse) zu notieren. Die detaillierte Auswertung und Darstellung der Ergebnisse erfolgt z.B. mit Hilfe von ORIGIN.

Zur Darstellung des Feigenbaum-Diagramms werden die Amplituden über dem Steuerparameter aufgetragen.

5 Chaos bei der logistischen Abbildung

5.1 Berechnung des Bifurkationsdiagramms

Für die Iteration der Abbildung (Gl. 1) ist ein Computer-Programm zu schreiben. Die folgenden Schritte sind zu realisieren:

- $a \in (0, 4]$ wählen
- für beliebigen Startwert $x_0 \in (0, 1)$ die Abbildung ca. 30 mal iterieren, um auf den Attraktor zu gelangen. Dieser Trajektorien-Abschnitt ist zu verwerfen.
- die Iteration dann auf dem Attraktor mit x_{30} beginnen und die Trajektorie speichern
- die gespeicherten Werte gegen a plotten
- a neu wählen und alles wiederholen

Frage: Warum muss man die ersten Iterationsschritte ignorieren?

5.2 Der Ljapunov - Exponent

Ein Maß für die sensitive Abhängigkeit der Bewegungen von deren Anfangsbedingungen, d.h. Stabilität der Bahnen, ist der maximale Ljapunov-Exponent λ_{max} (Chua-System ist dreidimensional und hat deswegen 3 Ljapunov-Exponenten). Der chaotischen Bewegung entspricht $\lambda_{max} > 0$.

Eindimensionale Abbildungen

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

werden durch nur einen Ljapunov-Exponenten λ charakterisiert [8, 6, 9, 10]:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log_2 |f'(x_i)| ,$$

wobei x_i Punkte auf dem jeweiligen Attraktor $A(a)$ sind. Berechnen Sie $\lambda(a)$ für verschiedene Kontrollparameter $a \in (0, 4]$ der logistischen Abbildung (Gl. 1).

Literatur

- [1] Argyris, J., Faust, G., Haase, M.: Die Erforschung des Chaos, 1994 und 2010
- [2] Goldstein, H., Poole, C.P., Safko, J.L.: Klassische Mechanik, 3., vollst. bearb. und erw. Auflage, 2006
- [3] Jamal, R., Krauss, P.: LabVIEW – Das Grundlagenbuch, 1998 und Jamal, R., H. Pichlik: LabVIEW – Das Anwenderbuch, 1999
- [4] Jetschke, G.: Mathematik der Selbstorganisation: Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie, 1989 und 2009
- [5] LabVIEW - eine online-Einführung. https://ni.adobeconnect.com/_a56821929/p71165587/
- [6] Leven, R.W., Koch, B.P., Pompe, B.: Chaos in dissipativen Systemen, 1989 und 1994
- [7] May, R.: Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature 261 (1976) 459-467
- [8] Meschede, D.: Gerthsen. Physik, 22., völlig neu bearbeitete Auflage, 2003, Kap20
- [9] Schuster, H.G.: Deterministic Chaos. An Introduction, 1988, 1995, 2008
- [10] Strogatz, S.H.: Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, 1994, 1997, 2002
- [11] Worg, R.: Deterministisches Chaos - Wege in die nichtlineare Dynamik, 1993