

12 Hamilton-Jacobi-Gleichung, Wirkungs- und Winkelvariablen

ABGABE: 16.7.

Aufgabe 12.1 (10 Punkte)

Man löse die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + aq$$

mit der Wahl $P = E$. Bestimmen Sie $W(q, P)$, finden Sie die Gleichungen für P und Q und berechnen Sie die Lösung $q(t), p(t)$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich im Potential

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ ax & x > 0 \end{cases}$$

dessen Parameter a sich langsam ändert. Wie ändert sich die Energie?

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Ein relativistisches Teilchen

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

bewegt sich in einer Dimension zwischen zwei Wänden. Finden Sie die Energie des Teilchens in Abhängigkeit vom sich langsam ändernden Abstand zwischen den Wänden L .

Aufgabe 12.4 (6 Punkte)

Betrachten Sie einen ungedämpften Schaltkreis (Kapazität des Plattenkondensators C , Induktivität der Spule \mathcal{L}). Die Platten des Kondensators werden langsam auseinandergezogen, so dass am Ende der Abstand zwischen ihnen verdoppelt wird. Wie ändert sich die Energie der Schwingungen?

Fakultative Zusatzfrage: Wie ändert sich die Energie, wenn die Platten sehr schnell auseinandergezogen werden?

Aufgabe 12.5 (* Punkte)

Zwei Teilchen (mit der Massen M und $m \ll M$) können sich entlang geraden Linie OA bewegen. Stöße zwischen den Teilchen und zwischen dem Teilchen m und der Wand sind elastisch. Zur Zeit $t = 0$ ist die Geschwindigkeit des schweren Teilchens viel kleiner als die Geschwindigkeit des leichten Teilchens. Finden Sie die Bewegung des schweren Teilchens, gemittelt über die

Periode des leichten Teilchens.

Hinweis: Das kleine Teilchen bewegt sich in einem langsam geänderten Potential, dessen Energie kann man durch die adiabatische Invariante berechnen. Daraus gewinnt man eine effektive Hamiltonfunktion für das langsame schwere Teilchen.

