Mechanik

A. Pikovski

Universität Potsdam, 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Newtonsche Mechanik

1.1 Kinematik

Die Aufgabe der Mechanik ist es, die Bewegung materieller Körper quantitativ zu beschreiben und zu berechnen.

Wir wollen uns zunächst mit der Punktmechanik befassen. Dabei werden mit Körpern Massenpunkte, das sind punktförmige Teilchen der Masse m, gemeint. Diese Objekte haben keine räumliche Ausdehnung, besitzen aber eine endliche Masse m. Ob eine solche Idealisierung möglich und zweckmäßig ist, hängt von den physikalischen Umständen und von der Fragestellung ab.

Hier sind einige Bespiele von Körpern, für die diese Idealisierung angewandt werden kann:

	Radius	Masse
Elektron	$2.81792 \cdot 10^{-15} m$	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Billiardkugel	$3 \cdot 10^{-2}$ m	$2 \cdot 10^{-1}$ kg
Erde	$6.378 \cdot 10^{6}$ m	$5.976 \cdot 10^{24}$ kg(Erde-Sonne-Abst: $1.496 \cdot 10^{11}$ m)
Sonne	$6.96 \cdot 10^{8}$ m	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg

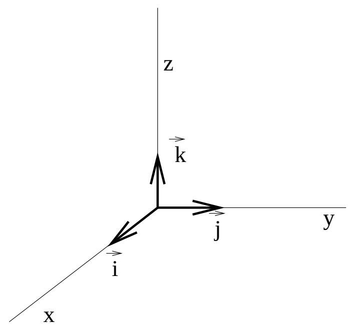
Zur quantitativen Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten benötigen wir mathematische Modelle für Raum und Zeit.

Die Zeit wird als Menge aller Zeitpunkte durch die Menge der reelen Zahlen beschrieben. Die tägliche Erfahrung sagt uns, daß die Zeit universell zu sein scheint, d.h. daß sie unbeeinflußt vom physikalischen Geschehen abläuft. Matematisch bedeutet das, daß man die Zeit als unabhängige Variable betrachtet, von der andere Variablen abhängig sind. Die Zeit wird als t bezeichnet, manchmal auch als τ.

Wir benötigen ein matematisches Modell des Raumes, in dem sich Massenpunkte bewegen. Als ein solches Modell nehmen wir den dreidimensionalen reelen

Vektorraum. Ein fester Punkt O wird als Ursprung oder Bezugspunkt ausgezeichnet. Dann ist jeder Punkt durch den Vektor $\vec{r}$ bestimmt. Der Vektor $\vec{r}$ heißt auch Ortsvektor bezüglich des Bezugpunktes O. Nun beschreibt mit fortgeschreitender Zeit der Ort des Massenpunktes $\vec{r}(t)$ eine sogenannte Bahnkurve in Raum.

Die Bahnkurve sowie der Ort wird oft in Bezug auf eine spezielles Koordinatsystem beschrieben. Man kann z.B. ein Ortonormalbasis wählen, d.h. drei Einheitsvektoren $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ die zusammen mit dem Bezugspunkt O ein Bezugssystem definieren. Wir werden oft schreiben $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, so daß der Ort auch durch das Tripel von reelen Zahlen (x, y, z) charakterisierbar ist.



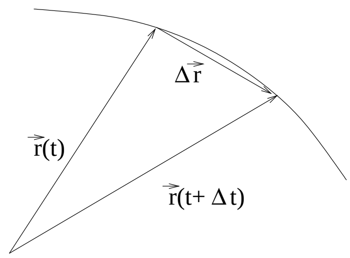
Für die Bewegung $\vec{r}(t)$ lassen sich die Geschwindigkeit und die Beschleunigung definieren. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung von der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ nach der Zeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$$

Zu bemerken ist, daß der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ ein Tangentialvektor an die Bahnkurve ist. Das folgt aus der Betrachtung des Grenzwertes: $\vec{v} \approx \Delta\vec{r}/\Delta t$.

Die Beschleunigung definieren wir als

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t).$$



Im Gegensatz zum Ortsvektor hängen der Geschwidigketitsvektor und der Beschleunigungsvektor von der Wahl des Ursprungs (Bezugspunkts O) nicht ab. Beweis: Der Ortsvektor $\vec{r}'$ bezüglich eines verschobenes Bezugssystems ist $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{R}$, so daß

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Beispiel 1.1 *Enfache Bewegungsformen*
1) Geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

$$\vec{a}(t) = 0$$

2) Wurfparabel:

$$\vec{r}(t) = (v_x t + x_0,\ v_y t + y_0,\ v_z t + z_0 - \frac{g}{2}t^2)$$

$$\vec{v}(t) = (v_x,\ v_y,\ v_z - gt)$$
$$\vec{a}(t) = (0, 0, -g)$$

3) Darstellung in Polarkoordinaten

$$\vec{r}(t) = (r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t))$$
$$\vec{v} = (\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi, \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi)$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi, \ddot{r} + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi)$$

Falls die Bewengung auf einem Kreis $r = const$ stattfindet und $\dot{\phi} = \omega$ eine Konstante ist, erhalten wir

$$\vec{a} = -\omega^2(r\cos\phi, r\sin\phi) = -\omega^2\vec{r}$$

Beispiel 1.2 *Drei Probleme zur Wurfparabel*
Problem 1 (einfach): Finden Sie den maximalen Punkt, der durch werfen mit Geschwindigleit V erreichbar ist.

Lösung:
(a) Zuerst uberlegt man, dass wegen Symmetrie das Problem kann als ein zweidimensionales Problem (x, z) betrachtet werden
(b) Wählen wir Urspring im Anfangspunkt, und führen den Winkel α ein:

$$\vec{r}(t) = (tV\cos\alpha, 0, tV\sin\alpha - gt^2/2)$$

(c) Endpunkt wird aus der Bedingung $z = 0$ gefunden, das ergibt $tV\sin\alpha - gt^2/2 = 0$, oder $t = 0$ und $t = 2V\sin\alpha/g$. Die erste Lösung ist Anfabgspunkt und die 2. Lösung ist der Endpunkt. Einsetzen in $x(t)$ ergibt

$$X = \frac{2V^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{V^2}{g}\sin 2\alpha$$

(d) sin-Funktion hat maximum bei $\pi/2$ und minimum bei $-\pi/2$, so dass

$$X_{max} = \frac{V^2}{g} \qquad \alpha_{max} = \pm\frac{\pi}{4}$$

Problem 2 (mittel):

Das selbe Problem, aber auf einer schiefen Ebene (Winkel θ).

Lösung: Wir betrachten hier nur den 2-dimensionalen Fall (x, z). Die Trajektorie $\vec{r}(t) = (tV\cos\alpha, 0, tV\sin\alpha - gt^2/2)$ ist die selbe, nun aber muss man Schnittpunkte mit der Gerade $z = \tan\theta x$ finden, also die Gleichung

$$tV\sin\alpha - gt^2/2 = tV\cos\alpha\tan\theta$$

lösen. Diese quadratische Gleichung hat 2 Lösungen

$$t = 0 \qquad t = \frac{2V}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\theta) = \frac{2V}{g\cos\theta}\sin(\alpha - \theta)$$

Dabei

$$x = \frac{2V^2\cos\alpha\sin(\alpha - \theta)}{g\cos\theta}$$

Wir finden amximalen Wert von x bez. α aus der Bedingung

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2V^2}{g\cos\theta}\cos(2\alpha - \theta) = 0$$

Die Gleichung $\cos(2\alpha - \theta) = 0$ hat Lösungen

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \qquad n = \ldots - 2, -1, 0, 1, \ldots$$

Weil $\theta < \alpha < \pi + \theta$ giltr, haben wir zwei Lösungen $\alpha_1 = \pi/4 + \theta/2$ und $\alpha_2 = 3\pi/4 + \theta/2$. Entsprechend berechnen wir die maximalen Koordinaten

$$x(\alpha_1) = \frac{2V^2}{g\cos\theta}\cos(\theta/2 + \pi/4)\sin(\theta/2 + \pi/4 - \theta)$$

$$= \frac{2V^2}{g\cos\theta}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta/2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta/2)(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta/2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta/2) =$$

$$= \frac{2V^2}{g\cos\theta}\frac{1}{2}(\cos\theta/2 - \sin\theta/2)^2 = \frac{V^2}{g\cos\theta}(1 - \sin\theta)$$

$$x(\alpha_2) = \frac{2V^2}{g\cos\theta}\cos(3\theta/2 + \pi/4)\sin(\theta/2 + 3\pi/4 - \theta)$$

$$= \frac{2V^2}{g\cos\theta}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta/2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta/2)(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta/2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta/2) =$$

$$= -\frac{2V^2}{g\cos\theta}\frac{1}{2}(\cos\theta/2 + \sin\theta/2)^2 = -\frac{V^2}{g\cos\theta}(1 + \sin\theta)$$

Entsprechend

$$z_1 = \frac{V^2\sin\theta}{g\cos^2\theta}(1 - \sin\theta) \qquad z_2 = -\frac{V^2\sin\theta}{g\cos^2\theta}(1 + \sin\theta)$$

Wir können jetzt überprüfen, indem wir Extremfälle betrachten:
Für $\theta = 0$ erhalten wir $\pm V^2/g$ wie im problem 1
Für $\theta = \pi/2$ $z_2 = -\infty$ und

$$z_1 = \frac{V^2\sin\theta}{g\cos^2\theta}(1 - \sin\theta) = \frac{V^2}{g}\frac{\sin\theta(1 - \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = \frac{V^2}{2g}$$

Problem 3 (schwer):
Finden Sie den Bereich, welche durch werfen mit Anfangsgeschwindigkeit V erreichbar ist.

Lösung: Finden wir zuerst die Trajektorie $z(x)$*. Aus* $\vec{r}(t) = (tV\cos\alpha, 0, tV\sin\alpha - gt^2/2)$ *folgt*

$$z = x\tan\alpha - \frac{x^2 g}{2V^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Der Winkel α *ist der einziger Parameter. Um den gegebenen Punkt* (x, z) *zu erreichen, sollen wir aus dieser Gleichnung* α *bestimmen. Durch nutzen von* $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$ *kann man diese Gleichung als*

$$\tan^2\alpha\frac{gx^2}{2V^2} - \tan\alpha x + z + \frac{gx^2}{2V^2} = 0$$

umschreiben. Dies ist eine quadratische Gleichung, die entweder 2 oder 1 oder keine Lösungen hat. Im erreichbaren Bereich hat man zwei Lösungen: man kann einen Punkt auf dem Weg "hin" und auf dem Weg "zurück" erreichen. Im verbotenen Bereich hat man keine Lösung. Auf der Grenze hat man genau eine Lösung. Die Grenze wird also durch die Gleichung $det = 0$ *bestimmt, wobei det die Determinante der quadratischen Gleichung ist:*

$$x^2 - 4\frac{gx^2}{2V^2}(z + \frac{gx^2}{2V^2}) = 0$$

Das ergibt eine Parabel

$$z = \frac{V^2}{2g} - x^2\frac{g}{2V^2}$$

1.2 Das II. Newtonsche Gesetz

Das physikalisch Wesentliche der Mechanik eines Teilchens ist in Newtons zweitem Bewegungsgesetz enthalten. Das Gesetz basiert auf folgenden experimentellen Beobachtungen:
1) jeder physikalischer Körper hat die träge Masse m. Die Masse ist stets positiv und eine extensive Größe, d.h. ein Körper, der aus zwei Körpern der Massen m_1 und m_2 zusammengesetzt ist, hat die Masse $m_1 + m_2$.
2) Die Wechselwirkung physikalischer Körper läßt sich durch spezielle Vektoren – Kräfte $\vec{F}$ ausdrücken.

Das zweite newtonsche Gesetz gibt uns die Beziehung zwischen der Kraft und der Bewegung eines Teilchens. Zuerst definieren wir den Impuls eines Teilchens als

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dann wird das II. Gesetz als

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

geschrieben. Dieses Gesetz kann als grundlegendes Postulat angesehen werden. Diese Gleichung kann man als die Bewegungsgleichung des Massenpunktes betrachten. Besonders häufig ist der Fall, daß die Kraft gegeben ist, und man will die Bewegung $\vec{r}(t)$ berechnen. Das Aufstellen von Bewegungsgleichungen und deren Behandlung, d.h. das Aufsuchen der Lösungen und ihre physikalische Interpretation ist ein wesentliches Ziel in der klassischen Mechanik.

Matematisch gesehen bilden die Impulsdefinition und das II. Gesetz ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\vec{p}}{m} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \end{aligned}$$

Oft wird dieses System als eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung geschrieben

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

wobei der gewöhnliche Differentialquotient von $\vec{r}(t)$ in zweiter Ordnung auftritt.

Es war Newtons Ruhm, daß er die Gleichung für den Impuls geschrieben hat: Obwohl es damals ihm nicht bekannt war, bleibt diese Form des II. Gesetzes auch für geladene Teilchen im Magnetfeld, bei Raketen und relativistischen Teilchen gültig.

1.3 Bewegungen in einer Dimension

Bei eindimensionaler Bewegung ändert sich nur eine Koordinate, sei es x. Das 2. Newtonsche Gesetz kann man dann als

$$m\ddot{x} = F_x$$

schreiben. Die Kraft F_x kann im Allgemeinen von $x, \dot{x}, t$ abhängig sein. Allgemein, die Gleichung

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F_x(x, \dot{x}, t)$$

ist eine *Differentialgleichung* 2. Ordnung. Die Lösung ist von zwei Werten abhängig, bei uns sind diese $x(0)$ und $\dot{x}(0)$, also die Anfagnsposition und die Anfangsgeschwindigkeit. Eine allgemeine Formel für die Lösung existiert nicht.

Im Falle Dgl 1. Ordnung

$$\dot{x} = f(x,t)$$

existiert die allgemeine Formel für die Lösung auch nicht. Aber enfache Fälle kann man analytisch betrachten.

Die Gleichung

$$\dot{x} = f(t)$$

wird einfach dirch die Integration gelöst

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(t')\, dt'$$

Die Gleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

wird zuerst durch die Umformung

$$\frac{dx}{f(x)} = dt$$

und dann dirch die Integration gelöst

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t dt' = t$$

Beispiel 1.3 *Bewegung im konstanten Kraftfeld*
Falls die Kraft eine Konstante ist, dann gilt

$$m\ddot{x} = f$$

Schreiben wir diese Gleichung als ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{f}{m} \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \end{aligned}$$

Die erste Gleichung kann man einfach integrieren

$$\int_{t_0}^t \frac{dv_x}{dt}\, dt = \int_{t_0}^t f/m\, dt$$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \frac{f}{m}(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{f}{m}(t - t_0) + v_x(t_0)$$

Die zweite Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f}{m}(t - t_0) + v_x(t_0) \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{f}{2m}(t - t_0)^2$$

Um die Bewegung vollständig zu bestimmen, ist es nötig, die Werte von Integrationskonstanten $x(t_0)$ (die Anfangskoordinate) und $v_x(t_0)$ (die Anfangsgeschwindigkeit) vorzugeben. Diese ist die allgemeine Regel: eine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung ist von 2 Parametern abhängig.

1.3.1 Die Störungstheorie

Wir betrachten den Fall, wenn die Wurfparabel durch eine kleine Zusatzkraft gestört wird. Wir schreiben

$$\ddot{x} = -g + \varepsilon f(x, \dot{x})$$

wobei ε ein kleiner Parameter ist und die Funktion f die Kraft beschreibt. Z. B. wird die Reibungskraft durch $f = -\gamma\dot{x}$ beschrieben. Die Hauptidee der Störungsmethode ist die Entwicklung der Unbekannten x nach Potenzen von ε: $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots$. Diese Entwicklung setzen wir in der Bewegungsgleichung ein, und entwickeln (in die Taylor-Reihe) alle Terme nach Potenzen von ε:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + \varepsilon\ddot{x}_1 + \varepsilon^2\ddot{x}_2 + \ldots &= -g + \varepsilon f(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots, \dot{x}_0 + \varepsilon\dot{x}_1 + \varepsilon^2\dot{x}_2 + \ldots) \\ &= -g + \varepsilon[f(x_0, \dot{(x)}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\varepsilon\dot{x}_1 + \varepsilon^2\dot{x}_2 + \ldots) + \ldots] \\ &= -g + \varepsilon f(x_0, \dot{(x)}_0) + \varepsilon^2(x_1\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{x}_1\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}) + \ldots\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir getrennt die Terme, die zu jeder Ordnung in ε gehören: Weil ε klein ist, müssen diese Terme getrennt die Gleichung erfüllen. In der 0. Ordnung

$$\ddot{x}_0 = -g \quad \Rightarrow \quad x_0 = X + Vt - \frac{gt^2}{2}$$

wobei X, V die Anfangsbedingungen sind. In der 1. Ordnung

$$\ddot{x}_1 = f(x_0, \dot{x}_0) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' f(X + Vt'' - \frac{g(t'')^2}{2}, V - gt'')$$

Als Beispiel nehmen wir die Reibung: $f = -\gamma\dot{x}$. Dann

$$x_1 = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt''(\gamma(-V + gt'')) = \int_0^t dt'(-Vt' + \frac{gt'^2}{2}) = -\frac{Vt^2}{2} + \frac{gt^3}{6}$$

Hier spielt γ die Rolle von ε, deshalb wir setzen $\varepsilon \to \gamma$. Die ganze Lösung in der 1. Ordnung lautet

$$x(t) \approx X + Vt - \frac{gt^2}{2} + \gamma(-\frac{Vt^2}{2} + \frac{gt^3}{6})$$

Wir vergleichen jetzt diese approximative Lösung mit der exacten Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = -g$$

Für die Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ schreiben wir

$$\dot{v} + \gamma v = -g$$

Diese DGl wird durch die Variation der Konstanten gelöst. Zuerst lösen wir die Gleichung

$$\dot{v} + \gamma v = 0$$

Wir setzen $v = Ce^{\lambda t}$ ein und aus

$$\lambda C e^{\lambda t} = -\gamma C e^{\lambda t}$$

erhalten $\lambda = -\gamma$, C beliebig. Dann setzen wir $v = C(t)e^{-\gamma t}$ in $\dot{v} = -\gamma v - g$ und erhalten

$$\dot{C} = -g e^{\gamma t}$$

Integration ergibt

$$C(t) = C(0) + \int_0^t -g e^{-\gamma t'}\, dt'$$

und

$$v(t) = C(0)e^{-\gamma t} - g\frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma} e^{-\gamma t}$$

Hier $C(0) = V$ wobei V ist die Anfangsgeschwindigkeit. Weitere Integration ergibt

$$x(t) = X + \int_0^t v(t')\, dt' = X + \frac{V(1 - e^{-\gamma t})}{\gamma} - \frac{g}{\gamma} t + \frac{g(1 - e^{-\gamma t})}{\gamma^2}$$

Wenn wir den Exponent entwickeln $e^{-\gamma t} = 1 - \gamma t + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2 - \frac{1}{6}\gamma^3 t^3 + \ldots$, dann

$$x = X + Vt - \frac{g}{2}t^2 - \gamma(\frac{Vt^2}{2} - \frac{gt^3}{6}) + \ldots$$

Die Geltung dieser N'aherung ist $\gamma t \ll 1$.

Berechnen wir in der 1. Ordnung in γ, wie sich die Fallzeit von Höhe L mit Anfangsgeschwindigkeit $V = 0$ ändert. Die Gleichungs für die Fallzeit ist

$$L - \frac{g}{2}T^2 + \gamma \frac{g}{6} T^3 = 0$$

Wir entwickeln $T = T_0 + \gamma T_1 + \gamma^2 T_2$ und setzen in diese Gleichung:

$$L - \frac{g}{2}(T_0^2 + \gamma 2 T_0 T_1 + \gamma^2 (T_1^2 + 2T_0 T_2) + \ldots) + \gamma \frac{g}{6}(T_0^3 + 3\gamma T_0^2 T_1 + \ldots) = 0$$

Wir trennen jetzt verschiedene Ordnungen in γ:
Ordnung 0: $L - \frac{g}{2}T_0^2 = 0$ ergibt $T_0 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$.
Ordnung 1: $gT_0T_1 = \frac{g}{6}T_0^3$ ergibt $T_1 = \frac{T_0^2}{6}$.
Ordnung 2: $\frac{g}{2}(T_1^2 + 2T_0T_2) = \frac{g}{6}3T_0^2T_1$ ergibt

$$T_2 = \frac{T_0^2T_1 - T_1^2}{2T_0} = \frac{T_0^3}{12} - \frac{T_0^3}{72} = \frac{5T_0^3}{72}$$

Das Endergebnis bis zur 2. Ordnung ist

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \gamma\frac{L}{3g} + \gamma^2\frac{5}{72}\left(\frac{2L}{g}\right)^{3/2}$$

Anderer Zugang.
Zuerst transformieren wir die Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -g$$

zur dimensionslosen Form. Wir definieren $x = L\xi$ und $t = \sqrt{\frac{L}{g}}\tau$, wobei ξ und τ dimensionslos sind. Dann

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \gamma\sqrt{\frac{L}{g}}\frac{d\xi}{d\tau} = -1$$

Hier $\varepsilon = \gamma\sqrt{\frac{L}{g}}$ ist ein dimensionsloser Parameter. Diese Gleichung hat keine Parameter ausser ε, und die Anfangs- und Endwerte für ξ sind 1 und 0. Deshalb die Fallzeit $\mathcal{T}$ ist nur von ε abhängig: $\mathcal{T} = F(\varepsilon)$. Diese Form folgt auch aus der exakten Lösung

$$\xi = 1 + \frac{1 - \varepsilon\tau - e^{-\varepsilon\tau}}{\varepsilon^2}$$

Man kann einfach den Wert für $\varepsilon = 0$ finden: $F(0) = \sqrt{2}$, und ein Wert für $\varepsilon \to \infty$ finden $F(\varepsilon) \to \varepsilon$. Für ursprungliche Variablen

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}}F\left(\gamma\sqrt{\frac{L}{g}}\right)$$

1.3.2 Die zeitunabhängige Kraft

Als nächsten Fall betrachten wir die Kräfte, die vom Ort abhängig sind, also $F = F(x)$. Dann haben wir

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Man darf diese Gleichung nicht einfach integrieren, weil $x(t)$ eine unbekannte Funktion der Zeit ist, und deshalb ist F auch eine unbekannte Funktion der Zeit.

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\frac{dx}{dt}$ und erhalten auf der linke Seite

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}^2/2)$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\frac{dx}{dt}F(x)$$

und wir probiren jetzt, sie als eine Zeitableitung darzustellen. Nehmen wir eine Funktion $U(x)$ von x und leiten sie nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}U(x) = \frac{dx}{dt}\frac{dU}{dx}$$

Also wenn wir $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ oder $U(x) = -\int^x F(x)\ dx$ wählen, dann können wir die gesamte Gleichung als

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}^2/2) = -\frac{d}{dt}(U(x))$$

schreiben. Diese Gleichung können wir jetzt integrieren, was

$$m\dot{x}^2/2 + U(x) = E$$

ergibt, wobei E eine von Anfangsbedingungen abhängige Konstante ist. Was wir erhalten haben ist der Energiesatz. Die kinetische Energie ist $m\dot{x}^2/2$ und die potentielle Energie ist $U(x)$, die Gesamtenergie E ist erhalten.

Also haben wir unsere Gleichung einmal integriert, und haben eine Differentialgleichung 1. Ordnung bekommen. Diese können wir als

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$$

schreiben, oder

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}} = \pm dt$$

Wenn wir diese Gleichung integrieren, erhalten wir die Lösung

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2(E-U(\xi))}{m}}}$$

Die beiden Parameter x_0, E, die die Lösung charakterisieren, stehen für die beiden Anfangsbedingungen $x(t_0), v(t_0)$.

Beispiel 1.4 *Harmonischer Oszillator*
Der harmonische Oszillator wird charakterisiert durch das Kraftgesetz $F = -kx$*, d. h. die wirkende Kraft ist proportional zum Ausschlag* x *und treibt den Massenpunkt zum Ursprung zurück. Die potentielle Energie lautet dann*

$$U = \frac{k}{2}x^2$$

Die Gesamtenergie, die erhalten ist, hat hier die Form

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$$

Die Lösung hat die Form

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2(E - k\xi^2/2))}{m}}}$$

Um das Integral zu berechnen, schreiben wir die Lösung als

$$\pm\sqrt{k/m}(t - t_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{k} - \xi^2}} = \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{2E/k}}\bigg|_{x_0}^{x}$$

So erhalten wir harmonische Schwingungen

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\sqrt{k/m}(t - t_0) - \phi_0)$$

wobei $\sqrt{k/m}$ *die Frequenz,* $2E/k$ *die Amplitude , und* ϕ_0 *die Anfangsphase ist. Das Vorzeichen-Problem tritt hier nicht an: Alle mögliche Werte von* x *sind durch sin-Funktion abgedeckt und die Lösung*

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\sqrt{k/m}(t - t_0) - \phi_0)$$
$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\sqrt{k/m}(t - t_0) - \phi_0)$$

gilt für alle t*.*

Beispiel 1.5 *Potentialmaximum*
Betrachten wir die Bewegung wenn dir Kraft $F = kx$ *abstossend ist. Die Gesamtenergie lautet*

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

und die Lösung hat die Form

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2(E + k\xi^2/2))}{m}}}$$

Um das Integral zu berechnen, betrachten wir 3 Fälle getrennt.

Fall 1: $E > 0$. *Dann hilft der Ansatz*

$$\xi = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sinh y \qquad d\xi = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cosh y \, dy$$

und weil $\sqrt{1 + \sinh^2 y} = \cosh y$, *erhalten wir*

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}} \sinh \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + x_0$$

Dies ist eine Bewegung über den Potentialberg.

Fall 2: $E < 0$. *Dann hilft der Ansatz*

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{2|E|}{k}} \cosh y \qquad d\xi = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}} \sinh y \, dy$$

und weil $\sqrt{-1 + \cosh^2 y} = \pm \sinh y$, *erhalten wir*

$$x = \pm\sqrt{\frac{2|E|}{k}} \cosh \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + x_0$$

Dies ist eine Bewegung mit der Reflexion vom Potentialberg.

Fall 3: $E = 0$. *Dann*

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{k\xi^2}{m}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{k}} \ln |\xi| \Big|_{x_0}^{x}$$

und

$$x = \pm x_0 e^{\pm\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)}$$

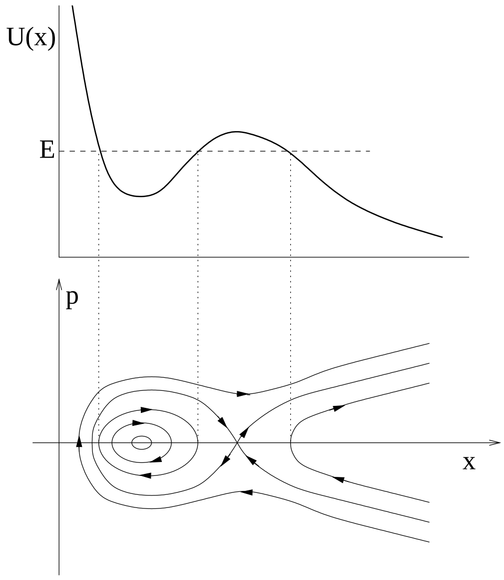
Dies ist eine Bewegung bis zur Spitze bzw Bergab.

1.3.3 *Qualitative Beschreibung der Bewegung in Phasenraum*

Es gibt eine anschauliche Form, die Bewegung darzustellen. Weil die Bewegung vollständig durch die Anfangswerte $x(t_0), p(t_0)$ bestimmt werden kann, es ist sinnvoll den Raum mit den Koordinaten x, p zu betrachten. Dieser heißt Phasenraum. Jeder Zustand wird dann als ein Punkt im Phasenraum dargestellt, und die Bewegung als eine Bahn, oder Bahnkurve. Z.B. gilt für den harmonischen Oszillator

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 = E$$

was genau die Formel einer Ellipse ist. Verschiedene mögliche Phasenbahnen sind Ellipsen, die ein Phasenportrait bilden.



Im Allgemeinen gilt, daß wenn ein autonomes System von gewönlichen Differenzialgleichungen 1. Ordnung vorhanden ist, bildet man den Phasenraum als einen Raum aller Variablen. Die wichtigen Eigenschaften des Phasenraumes sind folgende:
1. Jede Lösung des Gleichungssystems wird als die Phasenbahn dargestellt, die durch den Anfangspunkt läuft
2. Durch jeden Punkt im Phasenraum verläuft genau eine Phasenbahn, was der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen entspricht. Das bedeutet, daß mechanische Systeme deterministisch sind, d.h. Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit legen die Lösung eindeutig fest. Insbesondere heißt es, daß zwei Phasenbahnkurven sich nicht schneiden.
3. Man kann die Dynamik als einen Fluß oder eine Strömung im Phasenraum betrachten und z.B. die Bewegung nicht nur von einzelnen Bahnen, sondern von ganzen Bereichen untersuchen. Wenn der Phasenfluß kompliziert ist, spricht man von chaotischer Bewegung.
4. Es ist relativ einfach, das Phasenportrait (qualitatives Verlauf der Trajektorien) zu bilden, ohne Differentialgleichungen explizit zu lösen. Beschreiben wir jetzt die allgemeine eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes. Erstens, trägt man die potenzielle Energie $U(x)$ auf. Dann kann man für jede gegebene Gesamtenergie E die Bereiche, in denen sich das Teilchen aufhalten kann, ablesen. Zu endlichen Bereichen gehören geschlossene oder eingefangene Phasenbahnen, die topologisch äquvalent zu Kreisen und Ellipsen sind. Es handelt sich um eine periodische Bewegung zwischen Umkehrpunkten. Anderfalls ist die Bewegung ungebunden. Minima des Potentials entsprechen stabilen Gleichgewichtslagen (Fixpunkten), Maxima labilen (instabilen) Gleichgewichtslagen. Wenn die potentielle Energie ein Maximum beim $x = 0$ hat, kann man in der Nähe des Maximums $U(x) \approx U_0 - \frac{k}{2}x^2$ schreiben. Das ergibt

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{kx^2}{2} = E$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind nicht Ellipsen, sondern Hyperbeln. Die Allgemeine Vorgehensweise zur Untersuchung der eindimensionalen Bewegung lautet:
1) Man findet alle stabile und instabile Gleichgewichtslagen.
2) In der Nähe der stabilen Fixpunkte haben die Phasenbahnen eine elliptische Form, in der Nähe der labilen Fixpunkte bildet man Hyperbeln.
3) Man vollendet die Phasenbahnen, die in den instabilen Fixpunkten anfan-

gen/enden (Separatrixen)
4) Man bildet geschlossene Phasenbahnen zwischen Separatrixen.

Beispiel 1.6 *Eindimensionale Bewegung: Störungstheorie*
Berechnen wir die Zeitverzögerung gegenüber freier Bewegung bein einem schwachen Potential. Es gilt

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\int_{T_a}^{T_b} dt = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

Wir führen formal einen kleinen Parameter ε und schreiben

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E-\varepsilon U(x)}} = \frac{1}{\sqrt{E}}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-\varepsilon\frac{U(x)}{E}}}$$

Die Taylor-Entwicklung ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon\frac{U(x)}{E}}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{U(x)}{E} + \frac{3}{8}\varepsilon\left(\frac{U(x)}{E}\right)^2 + \dots$$

Deshalb (jetzt setzen wir $\varepsilon = 1$)

$$\Delta T = \sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{2E^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} U(x)dx + \frac{3}{8E^{5/2}}\int_{-\infty}^{\infty} U^2(x)dx + \dots\right)$$

1.4 Eindimensionale lineare Schwingungen

1.4.1 Ein Freiheitsgrad: freie Schwingungen

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

oder

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega^2 = k/m$$

Die allgemeine Lösung ist von zwei Parametern abhängig, es gibt 2 Schreibweisen:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

und

$$x = a\cos(\omega t + \phi)$$

wobei $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ und $\tan\phi = -C_2/C_1$. a ist die Amplitude, ϕ ist die Phase, und ω ist die Frequenz oder Eigenfrequenz von Schwingungen. Die Energie von Schwingungen lautet

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$$

Es gibt auch eine äquivalente komplexe Darstellung. Um die herzuleiten, betrachten wir die Gleichung als System von 2 DGl 1. Ordnung

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte sind $\pm i\omega$, die rechte Eigenvektoren sind

$$\begin{bmatrix}1 & i\omega\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & -i\omega\end{bmatrix}$$

Die linke Eigenvektoren sind

$$(1, -\frac{i}{\omega}) \qquad (1, \frac{i}{\omega})$$

Wir wählen diese Eigenvektoren als neue Variablen

$$z = x - \frac{i}{\omega}y \qquad z^* = x + \frac{i}{\omega}y$$

Diese neue komplexe Variablen erfüllen die Gleichungen

$$\dot{z} = i\omega z \qquad \dot{z}^* = -i\omega z^*$$

Die Lösung ist

$$z(t) = Ae^{i\omega t} = ae^{i\omega t + i\phi}$$

wobei

$$A = ae^{i\phi}$$

Die reele Variablem erhalten wir durch die Rucktransformation

$$x = \frac{z + z^*}{2} = \mathrm{Re}(Ae^{i\omega t}) = a\cos(\omega t + \phi)$$

$$y = \dot{x} = i\omega\frac{z - z^*}{2} = -\omega \mathrm{Im}(Ae^{i\omega t}) = -\omega a \sin(\omega t + \phi)$$

Diese Form ist besonders günstig, weil in allen linearen Operationen (Addition, Multiplikation mit einer Konstante, Ableitung, Integration) $e^{i\omega t}$ äquivalent zu $\cos\omega t$ ist, läßt aber alle Rechnungen einfacher laufen, weil die Ableitung und die Integration von Exponenten besonders einfach ist.

1.4.2 Ein Freiheitsgrad: erzwungene Schwingungen

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t)$$

Es ist bekannt, daß die allgemeine Lösung der inhomogenen Diffrentialgleichung

$$x = x_0 + x_1$$

ist, wobei x_0 die allgemeine Lösung der homogenen Dgl ist und x_1 eine partikuläre (also irgendeine spezielle) Lösung der inhomogenen Dgl ist.

1.4.3 Periodische äußere Kraft

Wir betrachten zunächst den Fall einer periodischen Kraft

$$F(t) = f \cos(\nu t + \beta)$$

Wir suchen die partikuläre Lösung in der Form

$$x_1 = b \cos(\nu t + \beta)$$

und erhalten

$$b = \frac{f}{m} \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi) + \frac{f \cos(\nu t + \beta)}{m(\omega^2 - \nu^2)}$$

1.4.4 Allgemeine äußere Kraft

Die allgemeine Lösung für eine beliebige Kraft $F(t)$ erhalten wir, wenn wir die Konstanten der allgemeinen Lösung als neue zeitabhängige Variable nehmen. Wir schreiben zuerst unsere Gleichung als ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\omega^2 x + \frac{1}{m} F(t)$$

Dann nutzen wir die komplexe Form

$$x = \frac{1}{2}[Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}] \qquad x = \frac{1}{2}[i\omega A e^{i\omega t} - i\omega A^* e^{-i\omega t}]$$

Dann ergibt sich ein System von zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{A} e^{i\omega t} + \dot{A}^* e^{-i\omega t} &= 0 \\ i\omega \dot{A} e^{i\omega t} - i\omega \dot{A}^* e^{-i\omega t} &= \frac{2}{m} F(t) \end{aligned}$$

das sich lösen läßt:

$$\dot{A} = \frac{F(t)e^{-i\omega t}}{mi\omega}$$

Betrachten wir den Fall, wenn die Anfangsbedingungen gleich Null sind, dann können wir schreiben

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{F(t')e^{-i\omega t'}}{im\omega}\, dt'$$

und für x erhalten wir

$$x = \mathrm{Re}\; e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{t} \frac{F(t')e^{-i\omega t'}}{im\omega}\, dt' = \int_{-\infty}^{t} \frac{F(t')\sin(\omega(t-t'))}{m\omega}\, dt'$$

Beispiel 1.7 <u>*Genaue Resonanz*</u>
Wenn $F(t) = \cos\omega t$*, erhalten wir*

$$x(t) = \int_0^t \frac{\cos\omega t' \sin(\omega(t-t'))}{m\omega}\, dt' = \int_0^t \frac{\sin(\omega t - \omega t' + \omega t') + \sin(\omega t - \omega t' - \omega t')}{2m\omega}\, dt'$$

Das Ergebnis lautet

$$x(t) = t\frac{\sin\omega t}{2m\omega}$$

Wir können das Integral so umschreiben

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')F(t')\, dt'$$

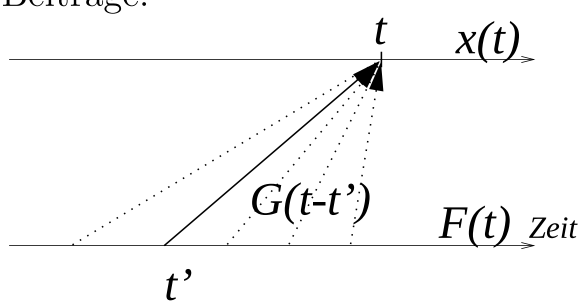
wobei

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\sin(\omega t)}{m\omega} & t > 0 \end{cases}$$

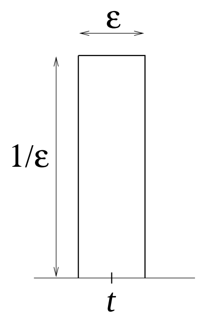
oder in kompakter Form

$$G(t) = \frac{\sin(\omega t)}{m\omega}\theta(t), \qquad \theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Die Funktion G heißt Greenfunktion oder Antwortfunktion. Man kann den Ausdruck für $x(t)$ als eine Summe von Beitragen der äußeren Kraft zu Zeitpunkten t' betrachten. Wegen der Linearität ist die Bewegung eine lineare Kombination (ein Integral) solcher Beiträge.



1.4.5 Stoß und Diracsche Deltafunktion



Betrachten wir die Kraft, die nur eine kurze Zeit zwischen $t_0 - \varepsilon/2$ und $t_0 + \varepsilon/2$ wirkt. Dann kann man die Lösung als

$$x(t) = \int_{t_0-\varepsilon/2}^{t_0+\varepsilon/2} G(t-t')F(t')\,dt'$$

darstellen. Für kleine ε ändert sich die Greenfunktion fast nicht, also erhalten wir

$$x(t) = G(t-t_0)\int_{t_0-\varepsilon/2}^{t_0+\varepsilon/2} F(t')\,dt'$$

Lassen wir jetzt ε gegen Null streben, mit der Bedingung, daß das Integral

$$\int_{t_0-\varepsilon/2}^{t_0+\varepsilon/2} F(t')\,dt'$$

eine Konstante bleibt. Das bedeutet, daß die Kraft eine unendlich kurze Zeit wirkt, diese Wirkung ist aber endlich. Mathematisch gesehen ist der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ keine stetige Funktion, dieser Grenzwert hat aber ein endliches Integral. Man nennt den Grenzwert Diracsche Deltafunktion, und die soll als eine verallgemeinerte Funktion (Distribution) betrachtet werden. Die hat nur Sinn, wenn man diese Funktion unter einem Integral hat. Also definieren wir

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dt\,\delta(t) = 1$$

Man kann verschiedene Funktionen als Annäherungen zur Deltafunktion betrachten, z.B.

$$\frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + x^2)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

Es ist einfach zu sehen, daß das Integral der Deltafunktion die Sprungfunktion

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt'$$

ist und für beliebige stetige Funktion $g(t)$ gilt

$$\int g(t)\delta(t-t_0)\,dt = g(t_0)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$$

weil

$$\int g(t)\delta(at)\,dt = \frac{1}{a}\int g(\frac{y}{a})\delta(y)\,dy = \frac{1}{a}g(0)$$

gilt.

In der Mechanik beschreibt die Deltafunktion einen Stoß. Wenn wir $F(t) = \delta(t)$ in die Lösung für x einsetzen, erhalten wir

$$x(t) = G(t)$$

Hier liegt die andere Bedeutung der Greenfunktion: Sie ist die Antwort auf eine äußere Kraft in Form einer Deltafunktion.

Beispiel 1.8 *Greenfunktion für einen harmonischer Oszillator mit Reibung*
Die Gleichung für einen Oszillator mit Reibung hat die Form

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \delta(t)$$

Mit den Ansatz $x = e^{-\gamma t}y$ erhalten wir

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = \delta(t)e^{-\gamma t}, \qquad \Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2$$

Die Lösung für y lautet

$$y(t) = \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega t)\;\theta(t)$$

und für x erhalten wir

$$x(t) = G(t) = e^{-\gamma t}\frac{\sin\Omega t}{\Omega}\theta(t)$$

1.5 Bewegungen in drei Dimensionen

1.5.1 Energiebilanz und Wegintegrale

Wir wollen einen Massenpunkt der Masse m betrachten, der unter dem Einfluß eines Kraftfeldes steht. Dieses Feld ist durch eine Funktion $\vec{F}(\vec{r})$ gegeben, also durch 3 reele Funktionen von 3 Variablen. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Um die Energiebilanz zu analysieren, möchten wir wie bei der 1-dimensionalen Bewegung den Term $d(v^2)/dt$ bekommen. Weil $v^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}$ gilt, multiplizieren wir die Bewegungsgleichung mit $\dot{\vec{r}}$. Für die linke Seite erhalten wir

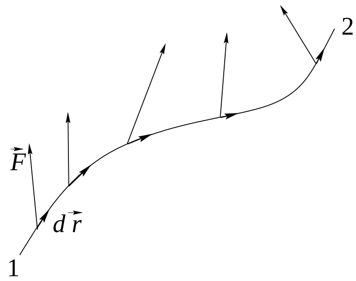
$$m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)$$

was nach der Integration über t von t_1 nach t_2

$$T(t_2) - T(t_1), \qquad T = \frac{m}{2}v^2$$

ergibt.

Für die rechte Seite erhält man das Integral



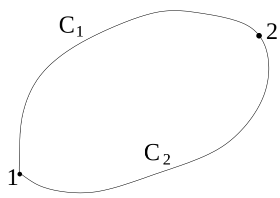
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

Betrachten wir jetzt $\vec{r}$ als unabhängige Variable, dann können wir das Integral als

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

umschreiben. Dieser Ausdruck stellt ein Wegintegral dar.

Das Wegintegral ist nur von der Bahn zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ abhängig, nicht aber von der Geschwidigkeit mit welcher das Teilchen sich bewegt. Allgemein nennt man das Integral



$$\int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

die von der Kraft am Punktteilchen längs der Bahn C zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ geleistete Arbeit. Im Allgemeinen ist es zu erwarten, daß die Arbeit nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, sondern auch von der Bahn C.

Was passiert, wenn das Integral von der Bahn unabhängig ist:

1) Das Wegintegral über einen jeden geschlossenen Weg verschwindet.

Es sei C ein geschlossener Weg, dann kan man das Integral so berechnen:

$$\int_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1,C_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2,C_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1,C_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_1,C_2}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$$

weil die letzte zwei Integrale gleich sind.

2) Es existiert eine eindeutige skalare Funktion $U(\vec{r})$, die das Kraftfeld $\vec{F}$ vollständig definiert.

Definieren wir

$$U(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Weil dieses Integral von der Bahn unabhängig ist, ist also U bis auf eine Konstante ($U(0)$) bestimmt. Schreiben wir

$$U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \approx -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Wählen wir $d\vec{r}||\vec{i}$, so erhalten wir

$$U(x+dx,y,z) - U(x,y,z) \approx -F_x dx$$

oder

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}$$

Analog erhalten wir $F_y = -\partial U(x,y,z)/\partial y$ und $F_z = -\partial U(x,y,z)/\partial z$. Zusammengefaßt, schreiben wir

$$\vec{F} = -\nabla U = -\text{grad}U, \quad \text{wobei} \quad \nabla = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}, \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}, \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})$$

Mann nennt U ein Potentialfeld oder auch Potential.

Ein Vektorfeld heißt konservativ wenn es ein Potential hat. Man sieht, daß ein konservatives Feld durch eine skalare Funktion (Potential) definiert wird.

Kehren wir zurück zur Energiebilanz. Für ein konservatives Kraftfeld können wir schreiben

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -(U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1))$$

Zusammen mit der kinetischen Energie ergibt das

$$T_2 + U(\vec{r}_2) = T_1 + U(\vec{r}_1)$$

Man nennt $E = T + U$ die Gesamtenergie, T die kinetische Energie, U die potentielle Energie.

Beispiel 1.9 *Homogenes Kraftfeld*
Es sei $U(\vec{r}) = \vec{A}\vec{r}$, dann $\vec{F} = -\nabla\vec{A}\vec{r} = -\vec{A}\nabla\vec{r} = -\vec{A}$.

Beispiel 1.10 *Rotationsymmetrisches Zentrallkraftfeld*
Sei das Potential nur vom Betrag von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängig: $U = g(r)$. Berechnen wir das Kraftfeld:

$$F_x = \frac{\partial g(r)}{\partial x} = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dg}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{g'}{r}x$$

Also ergibt sich

$$\nabla U = \frac{g'}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{g'(r)\vec{r}}{r}$$

Wir haben ein Kraftfeld erhalten, bei dem die Kraft stets auf der Verbindungslinie mit einem Zentrum O liegt, und der Betrag der Kraft hängt nur vom Abstand r von Zentrum ab. Insbesondere ist die Gravitationskraft mit dem Potential

$$U = -\gamma\frac{M_1 M_2}{r}$$

wichtig. Hier ist

$$\vec{F} = -\gamma \frac{M_1 M_2}{r^3} \vec{r}$$

Konservatives und nichtkoservatives Kraftfeld

Beispiel 1.11 *Nichtkonservatives Feld*
Betrachten wir das Feld

$$\vec{F} = (\vec{i}y, -\vec{j}x, 0)$$

Wählt man die geschlossene Bahn entlang der Kreise rund um 0*, ist es einfach zu zeigen, daß das Wegintegral nicht verschwindet. Ein solches Feld hat eine endliche Rotation.*

Beispiel 1.12 *Die Lorentz-Kraft*
Die Lorentz-Kraft, die auf einen geladenen Teilchen in Magnetfeld wirkt, ist $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$*, das bedeutet* $\vec{F} \perp \vec{v}$*. Also verschwindet das Integral*

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

Das Magnetfeld leistet also niemals Arbeit.

1.5.2 Impuls und Drehimpuls eines Teilchens

Der Impuls $\vec{p}$ ist mit Hilfe der Geschwindigkeit folgendermaßen definiert:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Aus den II. Newtonschen Gesetz

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

folgt der Erhaltungssatz: Wenn die Gesamtkraft $\vec{F}$ Null ist, dann bleibt der Impuls $\vec{p}$ erhalten.

Der Drehimpuls eines Teilchens um einen Punkt O wird mit $\vec{L}$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

wobei $\vec{r}$ der Radiusvektor von O zum Teilchen ist. Wir berechnen nun

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wir definieren nun das Drehmoment um O durch $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$. Dann können wir schreiben

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

und bekommen den Erhaltungssatz für den Drehimpuls eines Teilchens: Wenn das gesamte Drehmoment $\vec{N}$ Null ist, bleibt der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten.

1.6 Die Zentralkraftbewegung

Die Bewegung eines Teilchens in einem Zentralkraftfeld wird mit der folgenden Gleichung beschrieben:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla U(r)$$

Das ist ein System drei Differentialgleichungen 2. Ordnung, also ist die Lösung von 3 Anfangskoordinaten und 3 Anfangsgeschwidigkeiten abhängig.

Zuerst prüfen wir die möglichen Erhaltungsgrössen:

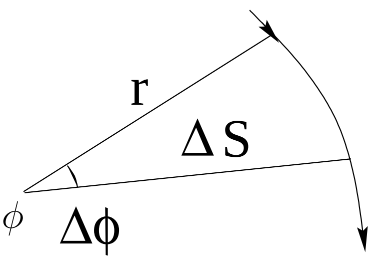
Der Impuls ist nicht erhalten, weil die Kraft nicht Null ist.

Die Energie ist erhalten, weil die Kraft konservativ ist.

Betrachten wir die Drehimpulsbilanz: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ weil $\vec{F} \| \vec{r}$ ist. Deshalb ist der Drehimpuls erhalten: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = const$. Wir folgern:

(a) Der Vektor $\vec{L}$ steht senkrecht zur Ebene, in welcher die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$ liegen. Die Richtung von $\vec{L}$ ist konstant, deshalb ist diese Ebene konstant. Das bedeutet, daß die Bewegung eines Teilchens immer in einer Ebene verläuft. Wir wählen die Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}$ in dieser Ebene, dann $\vec{L} = (0, 0, L_z)$.

(b) Betrachten wir jetzt die Bewegung in (x, y) Ebene in Polarkoordinaten, also



$$x = r\cos\phi \qquad v_x = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi$$

$$y = r\sin\phi \qquad v_y = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi$$

Stellen wir den Drehimpuls in Polarkoordinaten dar:

$$L_z = xp_y - yp_x = m(r\cos\phi(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi) - r\sin\phi(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi) = mr^2\dot{\phi}$$

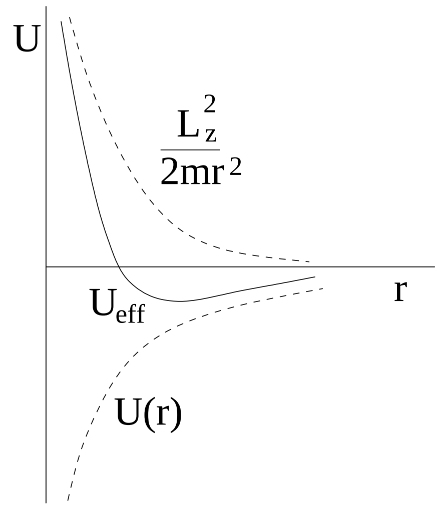
Also erhalten wir

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2}$$

Diese Gleichung bedeutet auch, daß der Vektor $\vec{r}$ in einem Zeitinterval Δt immer die gleiche Fläche überstreicht:

$$\Delta S = \frac{r^2}{2}\Delta\phi = \frac{r^2}{2}\frac{L_z}{mr^2}\Delta t = \frac{L_z}{2m}\Delta t$$

Dies ist bekanntlich auch die Aussage des zweiten Keplerschen Gesetzes.



Stellen wir jetzt auch die Energiebilanz

$$\frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) + U(r) = E$$

in Polarkoordinaten dar. Wir haben

$$v_x^2 + v_y^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{m^2r^2}$$

wobei wir den Drehimpulsbilanz berücksichtigt haben. Endgültig erhalten wir

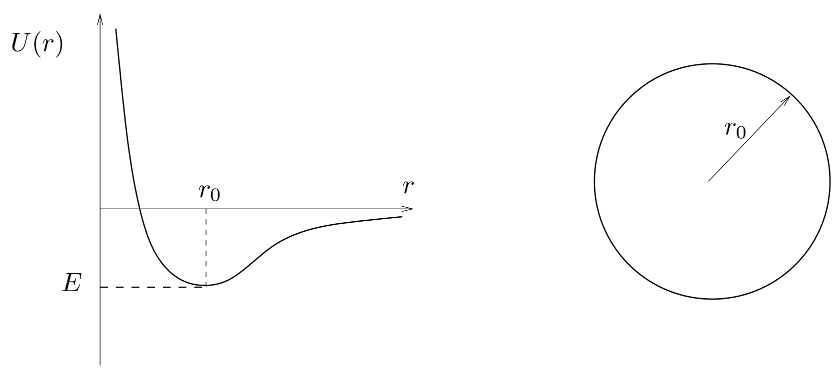
$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E$$

mit

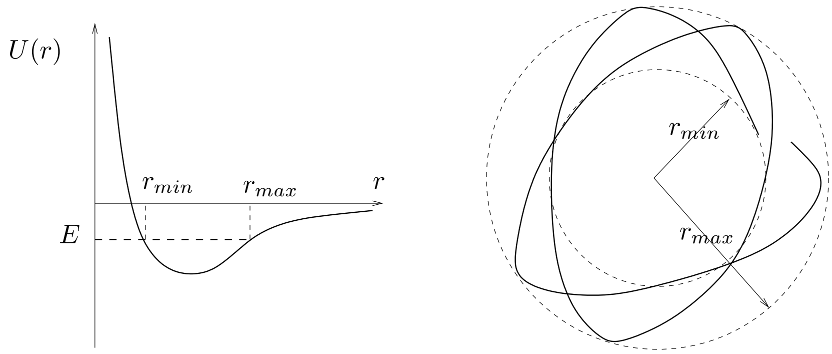
$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L_z^2}{2mr^2}$$

Der Anteil $\frac{L_z^2}{2mr^2}$ heißt Zentrifugalterm. Wir haben genau die Gleichung erhalten, die eine eindimensionale Bewegung eines Teilchens beschreibt, und diese Gleichung ist im Prinzip lösbar. Wenn man die Lösung $r(t)$ schon hat, kann man auch die Gleichung für $\dot{\phi}$ integrieren, und das Problem vollständig lösen.

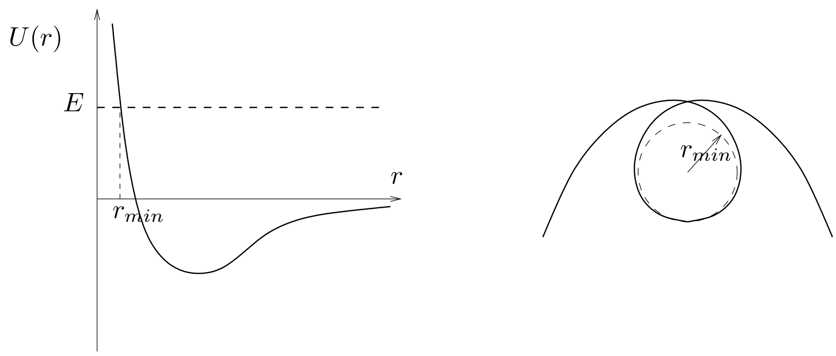
1.6.1 Qualitative Betrachtung



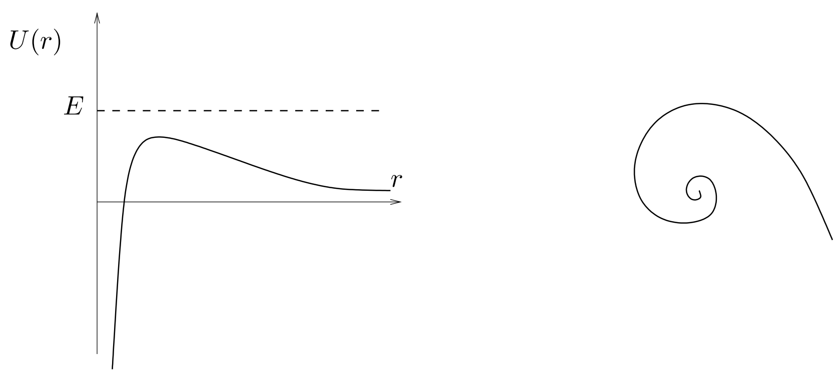
Kreisbewegung bei minimalen möglichen Energie



Finite Bewegung



Infinite Bewegung – Streuung



Falls das Potential bei $r \to 0$ stärker als $\sim r^{-2}$ abfällt, es gibt keinen minimalen Radius und die Trajektorie ist eine Spirale

1.6.2 Das Keplerproblem

Wir betrachten das Potential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

das man als Gravitationspotential oder als Coulombpotential ansehen kann. Dann erhalten wir fur das Effektivpotential

$$U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2}.$$

Dieses Potential hat ein Minimum, so daß sowohl gebundene als auch ungebundene Bahnen möglich sind. Finden wir jetzt diese Bahnen, das heißt den Zusammenhang zwischen r und ϕ, explizit.

1.6.3 Variante 1 (alt)

Wenn wir die Ausdrücke für $\dot{\phi}$ und $\dot{r}$ dividieren, erhalten wir

$$d\phi = \frac{L_z\, dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L_z^2}{2mr^2})}}$$

Mit $r = 1/\xi$ ergibt sich

$$d\phi = \frac{-d\xi}{\sqrt{\frac{2mE}{L_z^2} + \frac{2\alpha m}{L_z^2}\xi - \xi^2}}$$

Unser Ziel ist jetzt, den Ausdruck $\sqrt{A - \eta^2}$ zu erhalten, das erreichen wir mit dem Ansatz $\eta = \xi - \frac{\alpha m}{L_z^2}$. Das ergibt

$$d\phi = \frac{-d\eta}{\sqrt{A - \eta^2}}, \qquad A = \frac{2mE}{L_z^2} + \frac{\alpha^2 m^2}{L_z^4}$$

Nach der Integration erhält man daraus

$$\eta = \sqrt{A}\cos(\phi - \phi_0)$$

oder

$$\frac{1}{r} - \frac{\alpha m}{L_z^2} = \frac{\alpha m}{L_z^2}\sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{m\alpha^2}}\cos(\phi - \phi_0)$$

Die endgültige Formel schreiben wir mit $\phi_0 = 0$ als

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}, \qquad p = \frac{L_z^2}{m\alpha} \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\alpha^2 m}}$$

Das ist die Polargleichung für einen Kegelschnitt.

1.6.4 Variante 2 (neu)

Wir führen eine neue Variable $u = \frac{1}{r}$, so dass $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}$ gilt, ein. Weiterhin ersetzen wir die Zeitableitung d/dt durch die Phasenableitung

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{\frac{mr^2}{L_z}d\phi}$$

Dann können wir in die Energieerhaltung

$$\frac{m}{2}(\frac{dr}{dt})^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{L_z^2}{2m}\frac{1}{r^2} = E$$

die Formel

$$\frac{dr}{dt} = \frac{L_z}{m}\frac{du}{d\phi}$$

einsetzen und

$$\frac{m}{2}\frac{L_z^2}{m^2}(\frac{du}{d\phi})^2 - \alpha u + \frac{L_z^2}{2m}u^2 = E$$

erhalten. Weiterhin umformen wir

$$\frac{L_z^2}{2m}[(\frac{du}{d\phi})^2 + u^2 - \frac{2m\alpha}{L_z^2}u] = E$$

$$(\frac{du}{d\phi})^2 + (u - \frac{\alpha m}{L_z^2})^2 = \frac{\alpha^2 m^2}{L_z^4}(\frac{2EL_z^2}{\alpha^2 m} + 1)$$

Die ketzte Formel ist der Energieerhaltungsatz eines harmonischen Oszillators, deshalb

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{L_z^2} + \frac{\alpha m}{L_z^2}\sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\alpha^2 m}}\cos(\phi - \phi_0)$$

Die endgültige Formel schreiben wir mit $\phi_0 = 0$ als

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}, \qquad p = \frac{L_z^2}{m\alpha} \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\alpha^2 m}}$$

Das ist die Polargleichung für einen Kegelschnitt.

Um das offensichtlich zu machen, setzen wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad r\cos\phi = x$$

in diese Formel rein:

$$p = r(1 + \epsilon\cos\phi) = \sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon x$$

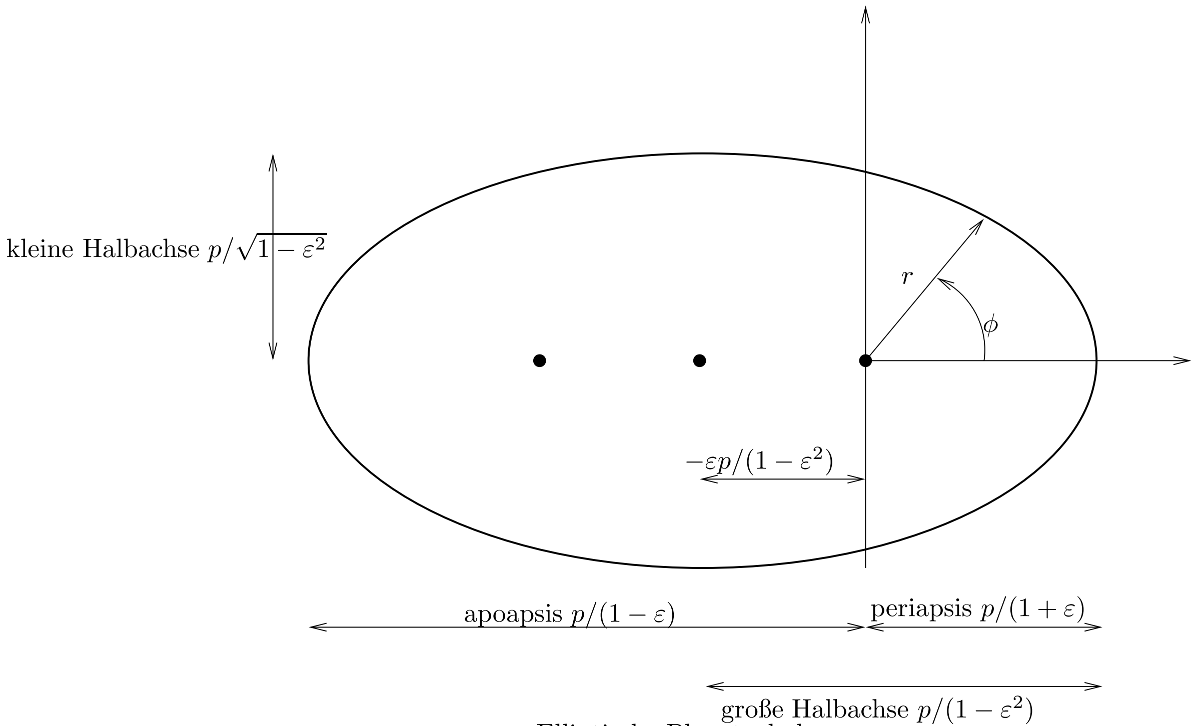
und schreiben die als

$$x^2(1 - \epsilon^2) + 2\epsilon p x + y^2 = p^2$$

Insgesamt treten folgende Bahnkurven auf:

1) $\epsilon = 0$ (Falls $E = -\frac{m\alpha^2}{2L_z^2}$): $x^2 + y^2 = p^2$ ergibt einen Kreis

2) $\epsilon < 1$ ($E < 0$) : Ellipse mit dem Exzentrizität ϵ (Übung: Man finde die Halbaxen der Ellipse).



Elliptische Planetenbahn

3) $\epsilon = 1$ ($E = 0$) : Parabel $x = \frac{p^2-y^2}{2p}$

4) $\epsilon > 1$ ($E > 0$) : Hyperbel

Um die Achsen der Hyperbel zu finden, schreiben wir

$$y^2 = x^2(\varepsilon^2 - 1) - 2\varepsilon px + p^2 = x^2(\varepsilon^2 - 1)(1 - \frac{2\varepsilon px - p^2}{x^2(\varepsilon^2 - 1)})$$

$$y = \pm x\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon px - p^2}{x^2(\varepsilon^2 - 1)}} \approx \pm x\sqrt{\varepsilon^2 - 1}(1 - \frac{\varepsilon px}{x^2(\varepsilon^2 - 1)})$$

$$y = -x\sqrt{\varepsilon^2 - 1} + \frac{\varepsilon p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

D.h., dass die Asymptote hat Steigung $\tan\phi_\infty = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ oder $\cos\phi_\infty = -1/\varepsilon$. Parameter $s = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$ lässt den Impaktparameter $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$ berechnen. Wenn wir hier $p = L_z^2/(m\alpha)$ und $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\alpha^2 m}}$ einsetzen, ergibt sich

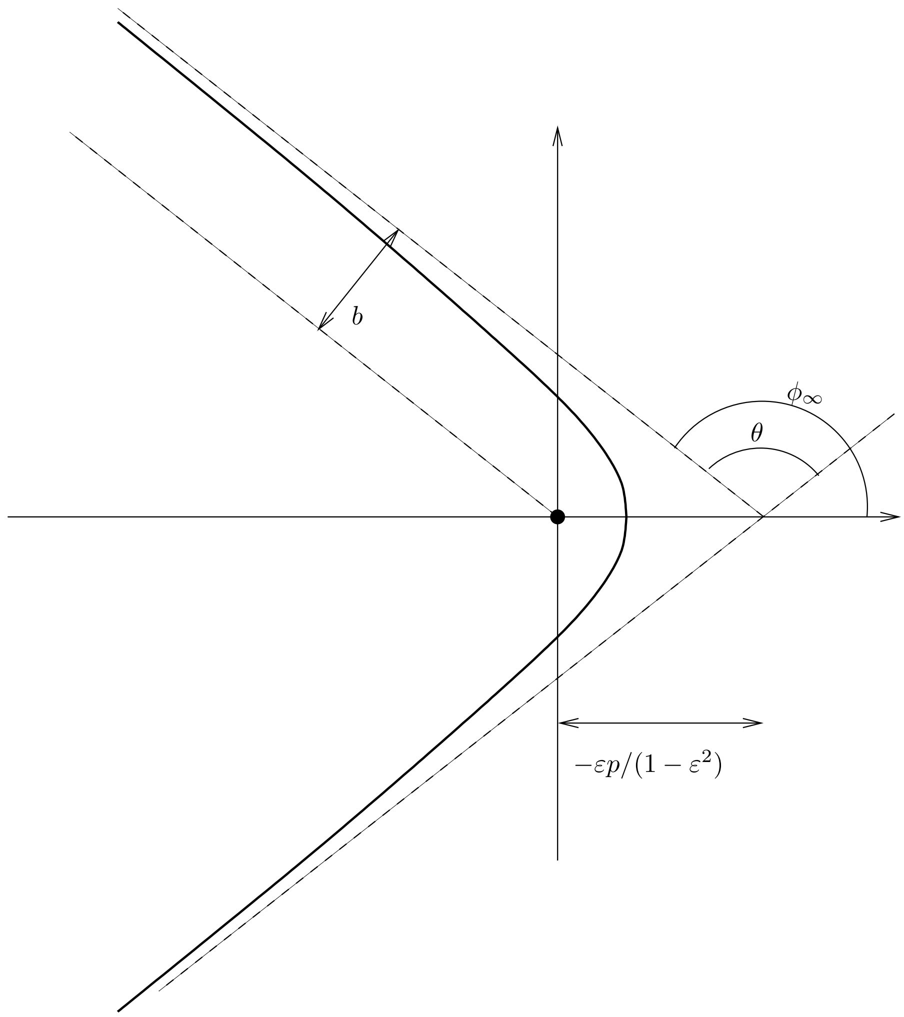
$$b = \frac{L_z}{\sqrt{2mE}} = \frac{L_z}{mv_\infty}$$

oder

$$L_z = bmv_\infty$$

Der Streuwinkel θ ist

$$\sin\frac{\theta}{2} = |\cos\phi_\infty| = \frac{1}{\varepsilon}$$



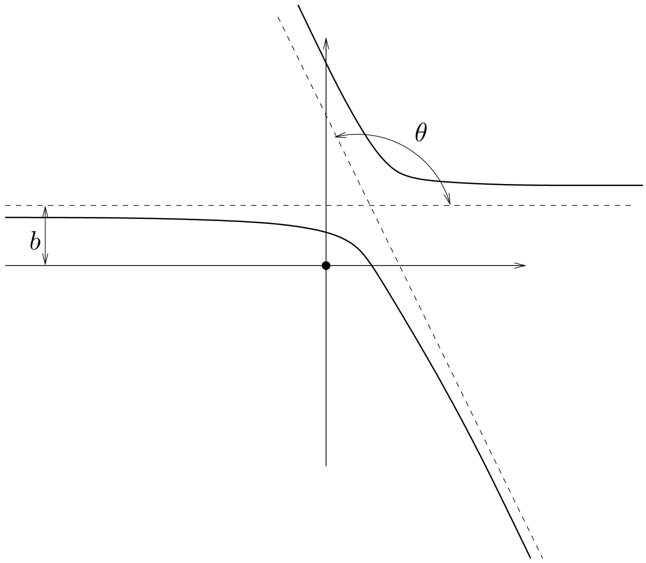
Hyperbolsche Planetenbahn

Für das Streuproblem ist eine andere graphische Darstellung mehr passend. Hier ist auch die Bahn bei einem abstossenden Potential ($\alpha < 0$) gezeigt. Stellen wir die den Streuwinkel durch die Energie und den Impaktparameter dar:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \cot\frac{\theta}{2} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} =$$
$$= \sqrt{\frac{2EL_z^2}{\alpha^2 m}} = \sqrt{\frac{2E2mEb^2}{\alpha^2 m}} = \frac{2Eb}{\alpha}$$

Beispiel 1.13 *Streuung vs Einfang*

Betrachten wir das Zentralkraftproblem mit dem Potential $-\frac{k}{r^4}$. *Das effektive*



Streuproblem

Potential $U_{eff} = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^4}$ *hat ein Maximum:* $dU_{eff}/dr = -\frac{L_z^2}{mr^3} + \frac{4k}{r^5} = 0$ *ergibt* $U_{eff\ max} = \frac{L^4}{16m^2k} = \frac{b^4E^2}{4k}$ *wobei* $b = \frac{L_z}{\sqrt{2mE}}$ *ist der Impaktparameter. Im Falle* $E > U_{eff\ max}$ *oder* $b^4 < \frac{4k}{E}$ *das aus unendicheen kommende Teilchen fällt aufs Potentialzentrum, sonst wird das Teilchen gestreut.*

Nah zum Ursprung kann man Zentrifugalpotential $L_z^2/(2mr^2)$ *und die Gesamtenergie* E *um Vergleich mit* k/r^4 *vernachlässigen, so dass* $m\dot{r}^2/2 \approx k/r^4$ *gilt oder* $\dot{r} \approx 1/r^2$*. Die Integration ergibt, dass die Fallzeit* $t \sim r_0^3$ *endlich ist. Darüber hinaus aus* $dr/d\phi \approx const$ *folgt die endliche Anzahl von Drehungen.*

1.7 System von Teilchen

Wir betrachten n Massenpunkte m_i, die den inneren und äußeren Kräften unterworfen sein mögen. Sei $\vec{F}_{ji}$ die Kraft von j auf i. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{f}_i$$

wobei f_i die äußeren Kräfte sind. Für dieses System betrachten wir nun die Impuls-, die Drehimpuls- und die Energiebilanz.

1.7.1 Der Impuls und die Impulsbilanz

Definieren wir den Gesamtimpuls $\vec{P}$ durch

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Kann man den Impuls als $\vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$ darstellen? Nehmen wir

$$M = \sum_i m_i \text{ und } \vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

dann wird $\vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$ gültig. M ist die Gesamtmasse des Systems und $\vec{R}$ ist der Schwerpunkt. Summiert man die Newtonschen Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{f}_i$$

Falls die innere Kräfte den III. Newtonsche Gesetz (gesetz von Aktion und Reaktion, Kraft und Gegenkraft) erfüllen, also $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$, verschwindet die erste Summe auf der rechten Seite. Was bleibt ist gerade die gesamte äußere Kraft $\vec{F}_e$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_e$$

Der Gesamtimpuls ist somit eine erhaltene Größe, wenn die gesamte äußere Kraft Null ist.

1.7.2 Der Drehimpuls und die Drehimpulsbilanz

Für ein System von n Messenpunkten definiert man den Gesamtdrehimpuls durch

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

fragt man nach der zeitlichen Veränderung von $\vec{L}$, so erhält man

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ji}$$

Betrachten wir den zweiten Summanden auf der rechten Seite:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})$$

Gilt nun das dritte Newtonsche Gesetz, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\sum_i \sum_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\vec{F}_{ji}$$

Nehmen wir jetzt, daß die inneren Kräfte längs der Verbindungslinie der Teilchen j und i wirken, d.h. $\vec{F}_{ji} \| (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Dann verschwindet die Summe, und die Änderung des Gesamtdrehimpulses ist allein durch das gesamte Drehmoment der äußeren Kräfte gegeben:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_e = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

Der Drehimpuls bleibt unveränderlich wenn das äußere Drehmoment Null ist.

1.7.3 Die Energie und die Energiebilanz

Wieder schreiben wir die Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{f}_i$$

Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}_i$, Summation über i und Integration von t_1 nach t_2 ergeben auf der linken Seite

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = T(t_2) - T(t_1)$$

wobei

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

die gesamte kinetische Energie ist. Auf der rechten Seite haben wir zwei Terme, die der geleisteten Arbeit der innneren und äußeren Kräften entsprechen. Falls äußere Kräfte konservativ sind, können wir

$$\vec{f}_i = -\nabla U_e(\vec{r}_i)$$

schreiben. Wenn die inneren Kräfte ebenfalls konservativ sind, dann können die Wechselwirkungskräfte $\vec{F}_{ji}$ und $\vec{F}_{ij}$ aus einer Potentialfunktion $U_{ij} \equiv U_{ji}$ gewonnen werden:

$$\vec{F}_{ji} = -\nabla_i U_{ij}, \qquad \vec{F}_{ij} = -\nabla_i U_{ij}$$

Für jedes Paar erhalten wir dann

$$\dot{\vec{r}}_i(-\nabla_i U_{ij}) + \dot{\vec{r}}_j(-\nabla_j U_{ij}) = -\frac{dU_{ij}}{dt}$$

und die Arbeit kann als

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} U_{ij}\Big|_1^2$$

geschrieben werden. Zusammenfassend, können wir eine totale potentielle Energie als

$$U = \sum_i U_e(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} U_{ij}$$

definieren, so daß die Gesamtenergie $T + U$ erhalten bleibt.

1.7.4 Das Zwei-Körper-Problem

Wir haben zwei Teilchen min Massen m_1 und m_2, die die Newtonsche Bewegungsgleichungen erfüllen

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}, \qquad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Schreiben wir für dieses System die Impulsbilanz auf:

$$\vec{P} = const \qquad M\ddot{\vec{R}} = 0$$

wobei

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

ist. Das heißt der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig, und die wirklich interessante Dynamik steckt in der Relativbewegung. Sei

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Wir können jetzt dir Ortsvektoren $\vec{r}_{1,2}$ durch $\vec{R}$ und $\vec{r}$ darstellen:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Setz man dies in die Newtonsche Gleichung ein, dann erhaltet man

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(\vec{r})$$

Das ist genau die Gleichung, die die Bewegung eines Teilchens im rotiersymmetrischen Zentralfeld beschreibt.

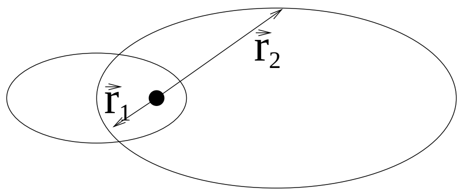
Beispiel 1.14 *Zwei Teilchen mit Grawitationswechselwirkung*
Für die Relativbewegung erhalten wir das Kepler-Problem, die ergibt

$$r(1 + \epsilon \cos \phi) = p$$

mit die reduzuerte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$. *Falls* $\vec{R} = 0$ *erhalten wir*

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Also laufen beide Teilchen auf Ellipsenbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt, der stets auf der Verbindungslinie der Teilchen liegt. Natürlich, wenn $m_2 >> m_1$ *gilt, bewegt sich das zweite Teilchen fast nicht.*



1.8 Inertialsysteme, Galileitransformationen

Wir betrachten die freie Bewegung eines Teilchens

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

Die Lösung diser Gleichung ist die gleichförmig geradlinige Bewegung. Dies formuliert man auch als I. Newtonsche Gesetz. Das physikalisch wesentliche in diesem Gesetz ist schon in der Definition des Radiusvektors $\vec{r}$ erhalten. Dieser Vektor ist von der Wahl des Ursprungs abhängig, d.h. von der Wahl des Koordinatensystems. Bezugsysteme, in denen das I. Newtonsche Gesetz im kraftfreien Fall die Form $\ddot{\vec{r}} = 0$ hat, heißen Inertialsysteme. Für diese Systeme stellte Galilei das Relativitätsprinzip auf: Alle Inertialsysteme sind gleichwertig. Das bedeutet inhaltlich, daß physikalische Vorgänge in allen Inertialsystemen in gleiche Weise ablaufen. Oder formal: Die Gesetze in allen Inertialsystemen haben die gleiche Form.

Die Übergang von einen Inertialsystem zum anderen kann verschiedene Formen haben.

1) Eine Verschiebung des Nullpunktes um den konstanten Vektor

$$x' = x + a \quad y' = y + b \quad z' = z + c \quad t' = t$$

Diese Transformation hat 3 Parameter, das bedeutet, daß der Raum homogen ist.

2) Eine Drehung, bei der das neue System K' gegenüber dem System K zwar gedreht ist, der Ursprung beider Systeme aber derselbe ist. Z. B., die Drehung um die Axe z kann man als

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \quad z' = z \quad t' = t$$

schreiben. Diese Trasnformation bedeutet, daß der Raum isotrop ist (alle physicalische Eigenschaften sind Richtungunabhängig). Die allgemeine Drehung hängt von 3 Parametern ab.

3) Eine Verschiebung des Zeitnullpunktes

$$t' = t + a$$

(Zeit ist auch homogen)

4) Eine Galileitransformation

$$x' = x - v_x t \quad y' = y - v_y t \quad z' = z - v_z t \quad t' = t$$

zwischen zwei Inertialsystemen, wobei K' sich gegenüber K mit einer konstanten Geschwidigkeit bewegt. Diese Transformation ist von 3 Parametern abhängig und entspricht spezielle Relativitätseigenschaften der Raum-Zeit.

Man kann alle Transformationen verwenden, so daß die allgemeine Transformation mit Hilfe von 10 Parametern charakterisiert wird. Matematisch gesehen, bilden die Transformationen eine 10-parametrige Gruppe.

Beispiel 1.15 _Zentrallkraftbewegung_
Die Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{\vec{r}} = g(r)\vec{r}$$

Diese gleichung ist unter Zeittranslation und Drehung invariant, nicht aber unter Raumtranslation und der Galileitransformation.

Beispiel 1.16 _Zweiteilchensystem_
Die Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = F(r_{12})\vec{r}_{12} \qquad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -F(r_{12})\vec{r}_{12}$$

sind unter allen Transformationen invariant.

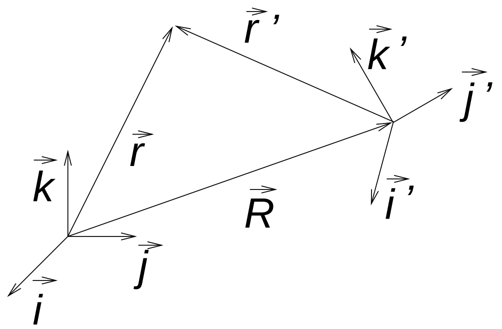
Beispiel 1.17 _Periodisches Potential_
Die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U(\vec{r}), \qquad U(x,y,z) = U(x+X,y,z)$$

ist unter Raumtranslationen $\vec{r}' = \vec{r} + m\vec{i}X$ *invariant.*

1.9 Bewegungen in einem Nicht-Inertialsystem

Sei K ein Inertialsystem; sei K' ein zweites System mit den Orten $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$. Das System K' bewegt sich relativ zu K. Geometrische Überlegungen zeigen, daß die Bewegungen beschleunigter Bezugssysteme als Translationen des Koordinatenursprungs plus Rotationen um diesen Ursprung angesehen werden können.



1.9.1 Translationen des Koordinatenursprungs

Hier ändern sich die Orte $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nicht. Deshalb hat man

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{R}}$$

und deshalb kann das II. Newtonsche Gesetz als

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}$$

geschrieben werden. Man sieht, daß hier die Scheinkraft $-m\ddot{\vec{R}}$ auftritt. Es ist bemerkenswert, daß die Scheinkräfte in gleicher Weise auftreten wie Gravitationskräfte. Für ein Massenpunkt im homogenen Schwerfeld an der Erdoberfläche gilt $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$. Im linear beschleunigten Bezugssystem haben wir $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - m\vec{b}$. Falls wir einen frei fallenden Fahrstuhl wählen, so haben wir $\vec{g} = \vec{b}$ und in K' gelten die gleichen Bewegungsgleichungen wie ohne Gravitation.

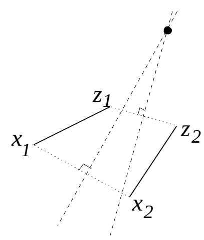
Beispiel 1.18 _Der Fallturm Bremen_
Der Fallturm Bremen ist ein in Europa einzigartiges Großlabor, daß Wissenschaftlern aus aller Welt die Möglichkeit zu erdgebundenen Experimenten unter

kurzzeitiger Schwerelosigkeit bietet. Im Gegensatz zur orbitalen Mikrogravitationsforschung besteht hier eine permanente und kostengünstige Nutzungsmöglichkeit. Seit Inbetriebnahme im Sept. 1990 steht das 145,5m hohe Betonbauwerk auf dem Gelände der Universität Bremen zur Verfügung und ist eine wichtige Ergänzung zu den bestehenden und geplanten Laboreinheiten der orbitalen und suborbitalen Schwerelosigkeitsforschung. Mit der Anlage ist es möglich bis zu dreimal täglich für jeweils 4,74 Sekunden den Zustand der Schwerelosigkeit zu erreichen. Um die Schwerelosigkeitszeit auf ca. 9 Sekunden zu verdoppeln, wird in einer geplanten Ausbaustufe am Fuße des Turmes ein Katapult als Abschußvorrichtung installiert. Weiteres siehe http://www.zarm.uni-bremen.de/

1.9.2 Rotierende Bezugssysteme

Die Drehung wird mit Hilfe von 3 Parametern definiert, deshalb es ist zu erwarten, daß die Rotation durch einen Vektor definiert werden kann.

Wir zeigen zuerst, dass jede Bewegung eines Koordinatensystems mit fest bleibendem Ursprung als eine Rotation um eine Achse angesehen werden kann. Stellen wir uns ein Kugel vor, seine Position wird durch Angeben eines Bogens wohl definiert. Gegeben seien zwei Positionen des Bogens, x_1z_1 und x_2z_2. Dann konstruieren wir die Großkreise durch die Mittelpunkte der Bögen x_1x_2 und z_1z_2 und senkrecht zu diesen Bögen. Der Schnittpunkt dieser Kreise ergibt die Drehachse, Rotation um welche die Bögen x_1z_1 und x_2z_2 überlappt.



Die Rotation wird von drei Parametern bestimmt: zwei geben die Position der Achse an und ein Parameter ist der Winkel. Diese drei Parameter bilden aber keinen Vektor. Wichtig ist, dass zwei Rotationen man nicht durch Addition von zwei Rotations-Vektoren darstellen kann, weil die Rotationen nicht kommutieren (aber Vektorenaddition ist kommutativ). Im Gegenteil, infinitesimale Rotation läßt sich durch einen Vektor darstellen, da infinitesimale Rotationen kommutieren (bis zu vernachlässigbare Terme):

$$\vec{\Delta r} = \Delta\vec{\Phi} \times \vec{r}$$

$$\vec{\Delta r} = \Delta\vec{\Phi}_2 \times [\vec{r} + \Delta\vec{\Phi}_1 \times \vec{r}] = [\Delta\vec{\Phi}_2 + \Delta\vec{\Phi}_1] \times \vec{r} + \Delta\vec{\Phi}_2 \times [\Delta\vec{\Phi}_1 \times \vec{r}] \approx [\Delta\vec{\Phi}_2 + \Delta\vec{\Phi}_1] \times \vec{r}$$

Zum infinitesimalen Rotationsvektor $\Delta\vec{\Phi}$ gehört die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \Delta\vec{\Phi}/\Delta t$. Deshalb es ist zu erwarten, dass die Änderung des Ortsvektors durch einen Ausdruck

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \sim \vec{\omega} \times \vec{r}$$

gegeben wird. Wir erhalten diese Formel jetzt auch auf einem formalem Wege.

Betrachten wir zwei Koordinatensysteme:
das Inertialsystem K mit Basisvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
das rotierende System K' mit Basisvektoren $\vec{i}'(t), \vec{j}'(t), \vec{k}'(t)$. Jeder Vektor $\vec{A}$ läßt sich in beiden Systemen darstellen:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} = A_\xi\vec{i}' + A_\eta\vec{j}' + A_\zeta\vec{k}'$$

Man kann dieser Vektor sowohl in K als auch in K' nach Zeit ableiten:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_K = (\dot{A}_x\vec{i} + \dot{A}_y\vec{j} + \dot{A}_z\vec{k}) \qquad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{K'} = (\dot{A}_\xi\vec{i}' + \dot{A}_\eta\vec{j}' + \dot{A}_\zeta\vec{k}')$$

Es ist einfach zu sehen, daß

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_K = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{K'} + (A_\xi\dot{\vec{i}}' + A_\eta\dot{\vec{j}}' + A_\zeta\dot{\vec{k}}')$$

Das letzte Term auf rechte Seite berechnen wir so (Einfachkeit wegen lassen wir Strich fallen):

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{i}} &= (\dot{\vec{i}}\vec{j})\vec{j} + (\dot{\vec{i}}\vec{k})\vec{k} \\
\dot{\vec{j}} &= (\dot{\vec{j}}\vec{i})\vec{i} + (\dot{\vec{j}}\vec{k})\vec{k} \\
\dot{\vec{k}} &= (\dot{\vec{k}}\vec{i})\vec{i} + (\dot{\vec{k}}\vec{j})\vec{j}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(A_\xi\dot{\vec{i}} + A_\eta\dot{\vec{j}} + A_\zeta\dot{\vec{k}}) =$$
$$= \vec{i}[(\dot{\vec{j}}\vec{i})A_\eta + (\dot{\vec{k}}\vec{i})A_\zeta] + \vec{j}[(\dot{\vec{i}}\vec{j})A_\xi + (\dot{\vec{k}}\vec{j})A_\zeta] + \vec{k}[(\dot{\vec{i}}\vec{k})A_\xi + (\dot{\vec{j}}\vec{k})A_\eta]$$

Wir bezeichnen

$$\omega_\xi = (\dot{\vec{j}}\vec{k}) = -(\dot{\vec{k}}\vec{j})$$
$$\omega_\eta = -(\dot{\vec{i}}\vec{k}) = (\dot{\vec{k}}\vec{i})$$
$$\omega_\zeta = -(\dot{\vec{j}}\vec{i}) = (\dot{\vec{i}}\vec{j})$$

und erhalten

$$(A_\xi\dot{\vec{i}}' + A_\eta\dot{\vec{j}}' + A_\zeta\dot{\vec{k}}') = (\vec{\omega} \times \vec{A})$$

das bedeutet, daß für jeden Vektor $\vec{A}$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_K = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

gilt. Es gibt Vektoren, die in beiden Systemen gleich sind, z. B. $\vec{r}$ unf $\vec{F}$, aber die Geschwidigkeit und die Beschleunigung sind nicht gleich. Für die Geschwindigkeitsvektoren

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_K, \qquad \vec{\nu} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{K'}$$

gilt

$$\vec{v} = \vec{\nu} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Für Beschleunigung erhalten wir

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_K = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \left(\frac{d(\vec{\nu} + \vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}\right)_{K'} + \vec{\omega} \times (\vec{\nu} + \vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$= \vec{\alpha} + 2\vec{\omega} \times \vec{\nu} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

Wir haben jetzt 3 zusäzliche Beschleunegungen. Das II. Newtonsche Gesetz hat die Form

$$m\vec{\alpha} = \vec{F} - m2\vec{\omega} \times \vec{\nu} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

Im rotierenden System K' ist der Massenpunkt außer der wirklichen Kraft $\vec{F}$ noch

- der Corioliskraft $-m2\vec{\omega} \times \vec{\nu}$
- der Zentrifugalkraft $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ und
- der Trägheitskraft der Rotation $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$

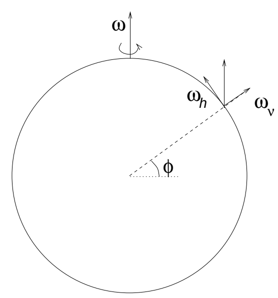
unterworfen. Die letzte Kraft verschwindet falls die Rotation konstant ist.

Die Zentrifugalkraft liegt in der Ebene, die durch $\vec{r}'$ und $\vec{\omega}$ aufgespannt ist. Die ist von die Geschwindigkeit $\vec{v}'$ unabhängig.

Beispiel 1.19 Erdrotation

Die Zentrifugalkraft ist am Equator maximal. Für die Erde $\omega \approx 7.3\ 10^{-5}$, *also*

$$\omega^2 R_e/g = \frac{7.3^2\ 10^{-10}\ 6.4\ 10^6}{9.8} \approx 3.2\ 10^{-3}$$



Die Coriolis-Kraft ist die wichtigste Kraft für die Bewegungen auf der Erdoberfläche. Der Drehgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ ist parallel zu Erderotationsachse und ist von Süden nach Norden gerichtet. An einen Punkt auf der Erdoberfläche betrachtet, hat dieser Vektor sowohl eine vertikale Komponente $|\vec{\omega}_\nu| = |\omega| \sin\phi$ als auch die horisontale Komponente $|\vec{\omega}_h| = |\omega| \cos\phi$. Auf der nördlichen Halbkugel ist $\vec{\omega}_\nu$ nach oben gerichtet, und $\vec{\omega}_h$ nach norden. Die Komponente $\vec{\omega}_\nu$ wirkt auf horisontale Bewegungen, und zwar erfährt der Massenpunkt auf der nördlichen Halbkugel eine Rechtsabweichung. Die Coriolis-Beschleunigung $2v\omega \sin\phi$ ist sehr klein, kann aber sehr deutliche Effekte auf der Erde und in der Atmosphere verursachen, u.A. Abweichung von Flüssen, die außertropischen Zyklone und Antizyklone, Passatwinde. Zu bemerken ist, daß die Coriolis-Kraft dasselbe Form hat wie die Lorenz-Kraft, leistet auch keine Arbeit.

Bei einer vertikalen Bewegung ist nur $\vec{\omega}_h$ wirksam, auf der nördlichen Halbkugel ergibt sich daraus eine Ost/West-Abweichung. Dies zu berechnen, schreiben wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} - 2\vec{\omega}_h \times \vec{v}$$

In die erste Nährung

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$$

Dan folgt in der zweiten Nährung

$$\Delta\ddot{\vec{r}} = -2\vec{\omega}_h \times (\vec{g}t + \vec{v}_0)$$

oder

$$\Delta\ddot{r} = 2\omega(gt - v_0)\cos\phi \qquad \Rightarrow \qquad \Delta r = \omega(\frac{1}{3}gt^3 - v_0t^2)\cos\phi$$

Setzen wir hier $v_0 = 0$ und $t = \sqrt{2H/g}$ ein:

$$\Delta r = \frac{1}{3}\omega g^{-1/2}(2H)^{3/2}\cos\phi \approx 2.2\ 10^{-5}H^{3/2}\cos\phi[m]$$

Für der Bremer Fallturm $H = 145m$, $\phi = 53°$ erhalten wir $2.5cm$.

Kapitel 2

Lagrangesche Mechanik

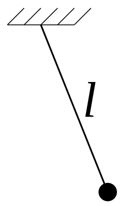
Die Newtonsche Mechanik hat einige Nachteile.

1) Die Bewegungsgleichungen sind nicht kovariant, d.h. sie haben in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Form. Z.B., zweidimensionale Bewegungsgleichungen schreibt man in kartesischen Koordinaten als

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y$$

In Polarkoordinaten hat man dagegen sehr komplizierte Gleichungen, die auch $\dot{r}$, $\dot{\phi}$ erhalten.

2) Für einige Probleme sind die Newtonschen Gleichungen nicht unmittelbar anwendbar. Als Beispiel betrachten wir das ebene Pendel. Der Massenpunkt wird durch eine Stange der Länge l auf einer Kreisbahn gehalten. Die Beschränkung der Bahn kann man durch folgende Zwangsbedingung schreiben



$$x^2 + y^2 = l^2$$

Die Stange übt eine Kraft aus, die wir nicht kennen. Beispiel: das Programm “xspringies”, das unter LINUX läuft, läßt verschiedene Kräfte modellieren, nicht aber eine Pendelbewegung.

Um die Newtonsche Mechanik zu verallgemeinern, gehen wir von Minimumprinzip aus. Aus der Statik wissen wir, daß stationäre Zustände als Minima vom Potential beschrieben werden können. Und das Minimum wird Koordinatensystemunabhängig als $\nabla U = 0$ beschrieben. Wenn wir auch die Bewegung als Minimum darstellen wollen, sollten wir einen matematischen Formalismus haben, der die Minimum-Berechnung von Funktionen verallgemeinert.

2.1 Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichung

Eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Vorschrift, die jedem x-Wert eine Zahl (y-Wert) zuordnet. In der Variationsrechnung betrachtet man dagegen Funktionale, die jeder Funktion $q(t)$ eine Zahl (den Wert des Funktionals) zuordnet. Am häufigsten definiert man ein Funktional mit Hilfe des Integrals:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\ f(q(t))$$

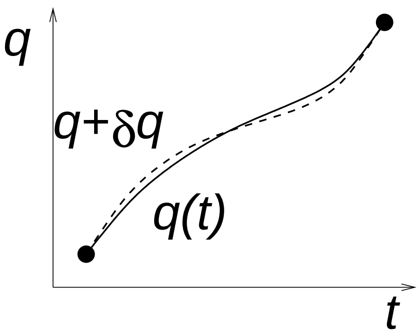
Das Funltional kann auch von $\dot{q}$ und t abhängig sein:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q, \dot{q}, t)$$

Beispiel 2.1 <u>*Wegstrecke*</u>
Die Wegstrecke entlang der Kurve $y = y(x)$ zwischen den Punkten x_1 und x_2 wird durch

$$l = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

gegeben.



Unsere Ziel ist das Minimum von S zu finden. Es sei nun $q(t)$ die gesuchte Funktion, die das Funktional S minimal macht. Dann muß $S[q + \delta q]$ mit einer beliebigen Abweichung δq größer als $S[q]$ sein. Dann ändert sich in erster Nährung das Funktional nicht, und diese Bedingung wollen wir jetzt explizit schreiben. Sei δq eine Störung, die Randbedingungen $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ erfüllt. Betrachten wir die Variation von S:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)]$$

Die Funktion L läßt sich ableiten:

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) \approx L(q, \dot{q}, t) + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Das ergibt

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

Schreiben wir den zweiten Teil des Integrals um:

$$\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(\delta q\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \delta q\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

So erhalten wir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \delta q\Big(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) + \delta q\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Der letzte Term verschwindet wegen Randbedingungen. Wir sehen jetzt, daß die Variation von S in erster Näherung Null für jede Störung wird, wenn die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

gilt. Diese heißt Euler-Lagrange-Gleichung. Falls S von mehreren Funktionen q_1, q_2, ... , q_n abhängig ist, erhält man für jede Variable die Euler-Lagrange-Gleichung.

Zu bemerken ist, daß die Euler-Lagrange-Gleichung nicht unbedingt das Minimum von S beschreibt, sondern auch das Maximum, oder, im Allgemeinen, stationäre Funktionen.

Beispiel 2.2 *Gerade Linie als Minimum der Wegstrecke*
Schreiben wir die Euler-Lagrange-Gleichung für die Wegstrecke in kartesischen Koordinaten:

$$S = \int dx\ \sqrt{1+(y')^2}, \quad L = \sqrt{1+(y')^2} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lauetet also

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$$

Sie lässt sich lösen:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = const \quad \Rightarrow \quad y' = a, \quad y = ax+b$$

Wir haben eine gerade Lineie erhalten. In Polarkoordinaten schreibt man die Wegstrecke als

$$l = \int ds = \int \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\phi)^2} = \int d\phi\ \sqrt{(r')^2 + r^2}$$

Wir erhalten also

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{r^2+(r')^2}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial r'} = \frac{r'}{\sqrt{r^2+(r')^2}}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung lauetet

$$\frac{d}{d\phi}\frac{r'}{\sqrt{r^2+(r')^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2+(r')^2}}$$

man kann die auch als

$$\frac{r''\sqrt{r^2+(r')^2} - r'\frac{rr'+r'r''}{\sqrt{r^2+(r')^2}}}{r^2+(r')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2+(r')^2}}$$

umschreiben. Endlich erhalten wir

$$r''r - 2(r')^2 - r^2 = 0$$

Der Ansatz $r = 1/\xi$ *läßt die folgende einfache Gleichung entstehen*

$$\xi'' + \xi = 0$$

deren Lösung

$$\xi = A\cos(\phi - \phi_0)$$

ist. Letztendlich erhalten wir die Gliechung für eine gerade Linie in Polarkoordinaten

$$Ar\cos(\phi - \phi_0) = 1$$

2.2 Hamiltonsches Prinzip

Wir vergleichen jetzt die Euler-Lagrange-Gleichung mit der Newtonschen Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Wenn wir wählen

$$q_i = x_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

dann stimmt die Euler-Lagrange-Gleichung mit der Netonschen Gleichung überein. In der Mechanik heißt L Lagrangefunktion, S die Wirkung oder Wirkungsfunktional. Wenn wir die Lagrangefunktion in der Form

$$L = \sum \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2 - U(x_1, ..., x_n, t) = T - U$$

wählen, also als Differenz kinetischer und potentieller Energien, dann erhalten wir die Bewegungsgleichungen, die man Lagrangesche Gleichungen 2. Art nennt.

Dies ist Inhalt des Hamiltonschen Prinzips: Die Bewegung läuft so ab, daß die Bahnkurve die Wirkung stationär macht. Manchmal wird das auch als Prinzip der kleinsten Wirkung genannt.

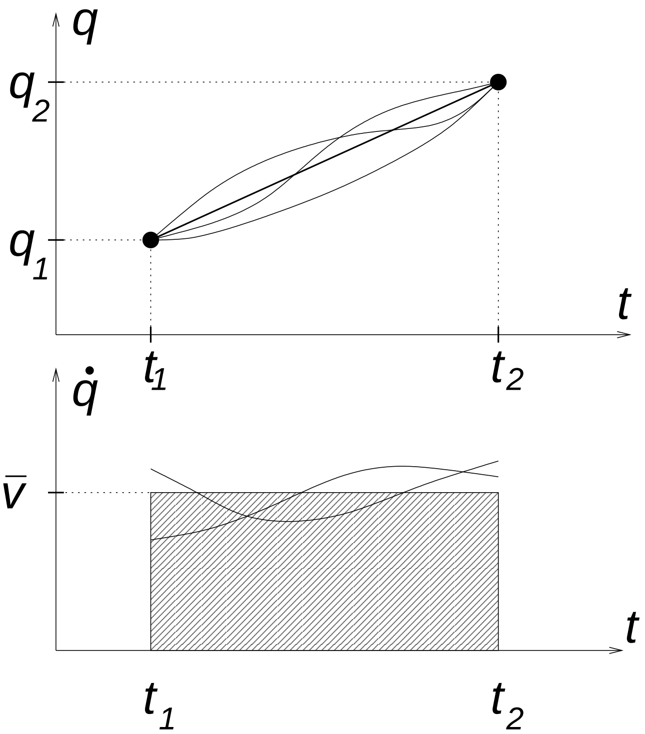
Man nennt:

q_i verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten

$\dot{q}_i$ verallgemeinerte Geschwindigkeiten

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ verallgemeinerte Impulse

$\frac{\partial L}{\partial q_i}$ verallgemeinerte Kräfte.



Beispiel 2.3 *Kraftfreie Bewegung*
Falls das Potential eine Konstante ist, muss die kinetische Energie minimal sein. Seien die Zeitpunkte $t_{1,2}$ und die Koordinaten $q(t_1) = q_1$, $q(t_2) = q_2$ gegeben. Die Frage ist, welche Bewegung liefert das Minimum der Wirkung S? Man kann sich verschiedene Bewegungstypen vorstellen (siehe Bild), nun muss die Bewegung mit minimalem S gefunden werden. Wir betrachten Bewegungen mit verschiedenen Geschwidigkeiten $v(t)$. Weil die Endpunkte fixiert sind, gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = q_2 - q_1$$

Wir bezeichnen $\bar{v} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$ *und betrachten das Integral*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}(v - \bar{v})^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} v^2 dt - \bar{v}^2 \cdot (t_2 - t_1)\frac{m}{2}$$

Dann können wir die Wirkung in der folgender Form darstellen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} v^2 dt = I + \bar{v}^2 (t_2 - t_1)\frac{m}{2}$$

Weil $I \geq 0$ *ist, wird das Minimum von* S *bei* $I = 0$ *erreicht, d. h. bei* $v = \bar{v} = const$. *Wir stellen fest, daß die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit die Wirkung minimisiert.*

Beispiel 2.4 *Zentralkraftbewegung*
Schreiben wir die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten aus:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$$

Die verallgemeinerten Impulse sind

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad \textit{(Drehimpuls!)}$$

Die Lagrange-Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \quad \textit{(Drehimpulserhaltung!)}$$

und

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

2.3 Systeme mit Zwangsbedingungen

Falls die Massenpunkte eines mechanisches Systems sich nicht völlig unabhängig voneinander bewegen können, sondern gewissen Nebenbedingungen unterliegen, spricht man von *Zwangsbedingungen.* Betrachten wir wieder das ebene Pendel. Der Massenpunkt ist zwei Kräften unterworfen: der Gravitationskraft $m\vec{g}$ und der unbekannten Kraft $\vec{K}$.

Wir nutzen jetzt die Kovarianz von Lagrangegleichungen bezüglich der Koordinatenwahl, und schreiben die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, t)$. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

Wegen der Zwangsbedingung ist aber r konstant, also ist nur die Gleichung für ϕ nichttrivial. In der Lagrangefunktion können wir deshalb $r = l = const$, $\dot{r} = 0$ einsetzen und die Lagrangefunktion für das Pendel bekommen, die nur von ϕ und $\dot{\phi}$ abhängt:

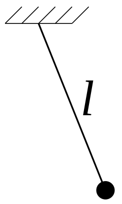
$$L(\phi, \dot{\phi}, t) = T - U = \frac{m}{2}v^2 + mgr\cos\phi = \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi$$

oder

$$\ddot{\phi} + \sqrt{g/r}\sin\phi = 0$$



Im allgemeinen Fall
- es gibt N Teilchen, die im 3-dimensionalen Raum mit $3N$ Variablen beschrieben werden
- es gibt K Zwangsbedingungen, die als K Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1(x_1, y_1, ..., z_N, t) &= 0, \\ &... \\ g_K(x_1, y_1, ..., z_N, t) &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben werden können. Solche Zwangsbedingungen, die nur von Koordinaten abhängig sind, nennt man *holonome* ("ganzgesetzliche"). Man unterscheidet auch zwischen zeitabhängigen (rheonomen) und zeitunabhängigen (skleronomen) Bedingungen.

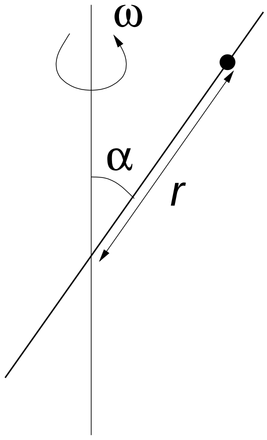
Man kann ein allgemeines Rezept zur Lösung von mechanischen Problemen formulieren:
1) Man wählt verallgemeinerte Koordinaten, um die Zwangsbedingungen zu erfüllen. Die Zahl solcher Koordinaten ist $3N - K$.
2) Man stellt die Lagrangefunktion $L = T - U$ in diesen Koordinaten dar
3) Die Bewegungsgleichungen sind dann die Lagrangesche Gleichungen 2. Art

Beispiel 2.5 *Geodäten auf einem Zylinder*
Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich auf einem Zylinder frei bewegen kann. Hier haben wir $N = 1$ und $K = 1$ (die holonome skleronome Zwangsbedingung lautet $x^2 + y^2 = l^2$). Wir wählen zylindrische Koordinaten, wobei nur z und ϕ unsere verallgemeinerte Koordinaten sind. Die kinetische Energie lautet $T = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + l^2\dot{\phi}^2)$. Die Bewegungsgleichungen sind einfach:

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{\phi} = 0$$

und als Lösung erhalten wir die Schraubenlinie

$$z = z_0 + v_z t \qquad \phi = \phi_0 + v_\phi t$$



Beispiel 2.6 Massenpunkt auf rotierender Stange
Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich längs einer rotierenden Stange bewegen kann. Die Stange rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Wir haben hier zwei (eine rheonome und eine skleronome) Zwangsbedingungen $\sqrt{x^2+y^2}/z = \tan\alpha$ und $y/x = \tan\omega t$. Wir wählen den Abstand r zum Zentrum als verallgemeinerte Koordinate. Dann gilt

$$z = r\cos\alpha \qquad x = r\sin\alpha\cos\omega t \qquad y = r\sin\alpha\sin\omega t$$

Aus

$$T = \frac{m}{2}v^2 \qquad U = mgr\cos\alpha$$

erhalten wir

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha) - mgr\cos\alpha$$

(Diese Lagrangefunktion ist zeitunabhängig, obwohl die Zwangsbedingungen rheonom sind!) Dies führt zur Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = -mg\cos\alpha + rm\omega^2\sin^2\alpha$$

Wir erhalten eine eindimensionale Bewegung mit dem effektiven quadratischen Potential

$$U(r) = mg\cos\alpha r - \frac{1}{2}r^2\omega^2\sin^2\alpha$$

Für nicht-mechanische Systeme ist es nicht einfach, die Lagrangefunktion zu schreiben. Glücklicherweise sind alle wichtigen Kräfte gut genug und lassen sich mit dem Lagrange-Formulierung beschreiben.

Beispiel 2.7 Elektromagnetisches Feld
Die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

ist geschwindigkeitsabhängig und deshalb existiert ein übliches Potential nicht. Wir zeigen jetzt, daß es ein verallgemeinertes Potential $U(q, \dot{q}, t)$ gibt, das die elektromagnetische Kräfte als verallgemeinerte Kräfte ergibt.

Erstens drücken wir die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch das Skalar- und das Vektorpotential Φ und $\vec{A}$ aus:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \qquad \vec{B} = rot\vec{A}(\vec{r}, t)$$

Zweitens, wählen wir für das Teilchen

$$U = e\Phi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t)\dot{\vec{r}}$$

Die Lagrangefunktion lautet dann

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{\vec{q}}^2 - e\Phi(\vec{q}, t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{q}}\vec{A}(\vec{q}, t)$$

Wir berechnen jetzt den verallgemeinerten Impuls

$$p_i = m\dot{q}_i + \frac{e}{c}A_i$$

Dieser Impuls hat nicht nur den mechanischen Teil, sondern einen elektromagnetischen Beitrag. Die Lagrangeschen Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}p_i = -e\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \frac{e}{c}\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i}$$

Die linke Seite können wir als

$$m\ddot{q}_i + \frac{e}{c}\frac{d}{dt}A_i = m\ddot{q}_i + \frac{e}{c}\sum_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

schreiben. Endgültig bekommen wir

$$m\ddot{q}_i = -e\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j}\right) = eE_i + \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B})_i$$

Für elektromagnetische Felder hat die Eichtransformation eine spezielle Form

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi(q, t), \qquad \Phi \to \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi(q, t)}{\partial t}$$

Die Lagrangefunktion wird dann so transformiert werden:

$$L \to L - \frac{e}{c}\frac{\partial \chi(q, t)}{\partial t} - \frac{e}{c}(\nabla\chi)\dot{\vec{q}} = L - \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\chi\right)$$

Wir haben wieder die gleichwertige Lagrangefunktion bekommen.

2.4 Ein Freiheitsgrad: freie Schwingungen

Wir betrachten ein System mit einem Freiheitsgrad, der durch die generalisierte Koordinate q beschrieben wird. Die Lagrangefunktion sei von der Form

$$L(q, \dot{q}) = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q)$$

Das System besitze eine stabile Gleichgewichtslage bei $q = q_0$, d. h. das Potential U hat bei $q = q_0$ ein Minimum. Die Taylorentwicklung des Potentials um $q = q_0$ lautet

$$U(q) = U(q_0) + \frac{k}{2}(q - q_0)^2$$

Wir setzen nun die Auslenkung aus der Ruhlage $x = q - q_0$ ein, dann entwickeln auch die kinetische Energie bis zur quadratischen Ordnung in x:

$$T = \frac{a(q_0)}{2}\dot{x}^2$$

damit wird die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen zu

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

wobei $m = a(q_0)$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

oder

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega^2 = k/m$$

Die allgemeine Lösung ist von zwei Parametern abhängig, es gibt 2 Schreibweisen:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

und

$$x = a \cos(\omega t + \phi)$$

wobei $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ und $\tan \phi = -C_2/C_1$. a ist die Amplitude, ϕ ist die Phase, und ω ist die Frequenz oder Eigenfrequenz von Schwingungen. Die Energie von Schwingungen lautet

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$$

Es gibt auch eine äquivalente komplexe Darstellung:

$$x = Re(Ae^{i\omega t})$$

wobei

$$A = ae^{i\phi}$$

Diese Form ist besonders günstig, weil in allen linearen Operationen (Addition, Multiplikation mit einer Konstante, Ableitung, Integration) $e^{i\omega t}$ äquivalent zu $\cos\omega t$ ist, läßt aber alle Rechnungen einfacher laufen, weil die Ableitung und die Integration von Exponenten besonders einfach ist.

Beispiel 2.8 Zweiatomiges Molekül

Hier haben wir ein Zwei-Körper-Problem und die Bewegungsgleichung ist

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Die Eigenfrequenz ist

$$\omega^2 = k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

Falls ein Molekül aus Isotopen mit Massen m_1', m_2' zusammengestellt ist, wird die neue Eigenfrequenz lauten (die Konstante k hat den selben Wert - warum?)

$$(\omega')^2 = \omega^2 \frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}$$

Beispiel 2.9 Ebenes Pendel

Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + lgm\cos\phi$$

Für kleine Winkel

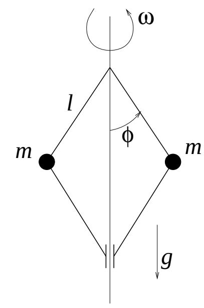
$$\cos\phi = 1 - \phi^2/2$$

und wir erhalten

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\phi}^2 - \omega^2\phi)$$

wobei

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$



Beispiel 2.10 Rotierende Raute

Wir betrachten eine rotierende Raute. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = m[(l\dot{\phi})^2 + (\omega l \sin\phi)^2] - 2mg(l - l\cos\phi)$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$2ml^2\ddot{\phi} = 2m\omega^2 l^2 \cos\phi \sin\phi - 2mgl\sin\phi$$

Wir finden zuerst die Fixpunkte:

$$\omega^2 l^2 \cos\phi \sin\phi = gl\sin\phi$$

Es gibt zwei Lösungen

$$\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0 \qquad \cos\phi_2 = g\omega^{-2}l^{-1}$$

Die zweite Lösung existiert wenn $\omega^2 > g/l$. *Wir linearisieren die Bewegungsgleichung direkt. Am Punkt* $\phi_1 = 0$ *für kleine Auslenkungen gilt* $\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1$, *was ergibt*

$$\ddot{\phi} + (\frac{g}{l} - \omega^2)\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}$$

Am Punkt ϕ_2 *entwickeln wir*

$$\cos(\phi_2 + x) \approx \cos\phi_2 - (\sin\phi_2)x \qquad \sin(\phi_2 + x) \approx \sin\phi_2 + (\cos\phi_2)x$$

Das ergibt

$$ml^2\ddot{x} = m\omega^2 l^2[2\cos^2\phi_2 - 1]x - mgl\cos\phi_2 x = [m\omega^2 l^2[\frac{2g^2}{\omega^4 l^2} - 1] - \frac{mlg^2}{\omega^2 l}]x$$

oder

$$\ddot{x} + (\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 l^2})x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 l^2}}$$

2.4.1 Eichtransformation

Es kann verschiedene Lagrangefunktionen geben, die zu den selben Bewegungsgleichungen führen. Z. B. kann man eine gegebene Lagrangefunktion mit einer Konstante multiplizieren oder addieren.

Eine wichtige Klasse von gleichwertigen Lagrangefunktionen ergibt sich aus den sogenannten Eichtransformationen: Dabei wird zu L die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(q,t)$ addiert:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}f(q,t)$$

Das Wirkungsintegral für L' lautet

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L' = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1)$$

Weil die Randwerte bei der Variation festgehalten werden, also $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, bekommen wir $\delta S' = \delta S$: Die Lagrangefunktionen L und L' führen zu denselben Bewegungsgleichungen.

Beispiel 2.11 *Galileitransformation*
Für ein freies Teilchen haben wir

$$L = \frac{m}{2} v^2$$

Unter einer Galileitransformation erhalten wir

$$L' = \frac{m}{2}(\vec{v} + \vec{V})^2 = \frac{m}{2} v^2 + m\vec{v}\vec{V} + \frac{m}{2} V^2 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{d}{dt}(m\vec{r}\vec{V} + \frac{m}{2} V^2 t)$$

2.5 D'Alembert-Prinzip

Die Newtonschen Gleichungen für ein System mit Zwangsbedingungen lauten

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U + \vec{K}$$

wobei die Zwangskräfte $\vec{K}$ zuerst nicht direkt angegeben sind. Man kann diese Kräfte berechnen wenn die Bewegung schon bekannt ist (z.B. durch Lösung der Lagrange-Gleichungen 2. Art), dann ist auch $\ddot{\vec{r}}$ bekannt. Eine andere Möglichkeit wäre, die Lagrange-Methode 1. Art zu verwenden. Es gibt eine allgemeine Eigenschaft der Zwangskräfte, die ihre Richtung charakterisiert. Diese ist als d'Alembert-Prinzip (Prinzip der virtuellen Arbeit) formuliert:

$$\vec{K}\delta\vec{r} = 0$$

Hier $\vec{r}$ ist eine sogenannte virtuelle Verrückung. Sie ist nicht eine mögliche reelle Verschiebung eines Teilchens, sondern eine infinitesimale Verschiebung, die mit Zwangsbedingungen zu gegebenen Zeitpunkt verträglich ist. Das heißt, daß für virtuelle Verrückungen die Zwangsbedingungen gefroren sind. Um den Unterschied deutlich zu machen, betrachten wir das Teilchen auf rotierender Stange. Für virtuellen Verrückungen frieren wir die Stangeposition: dies ergibt daß $\delta\vec{r}$ nur eine Komponente entlang die Stange hat. Im Gegenteil, reelle Verschiebungen haben auch eine Winkel-Komponente, weil die Stange rotiert.

Um das d'Alembert-Prinzip zu begründen, betrachten wir die Variation der Wirkung

$$\delta S = \int dt\ \delta q_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)$$

Hier ist $\delta q_i(t)$ genau die virtuelle Verrückung, weil die beiden Koordinaten $q_i(t)$ und $q_i(t) + \delta q_i(t)$ die Zwangsbedingungen zur Zeit t erfüllen. Um kartesische Koordinaten einzuführen, setzen wir

$$q \to \vec{r}, \qquad \delta q_i \to \delta r_i, \qquad L = \frac{m}{2}v^2 - U(\vec{r})$$

ein und schreiben die Variation der Wirkung als

$$\delta S = \int dt\, \delta\vec{r}\,(m\ddot{\vec{r}} + \nabla U) = \int dt\, \delta\vec{r}\,\vec{K} = 0$$

Dann folgt unmittelbar das d'Alembert-Prinzip.

2.6 Symmetrien und Erhaltungssätze

Schreiben wir die Lagrangegleichungen aus

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Es ist einfach zu sehen, daß wenn L von der verallgemeinerten Koordinate q_i unabhängig ist, dann ist der verallgemeinerte Impulse $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ eine erhaltene Größe.

Wir formulieren jetzt ein allgemeines Theorem (Noether-Theorem): Ist die Lagrangefunktion invariant unter einer kontinuierlichen Koordinatentransformation, so gibt es eine Erhaltungsgröße. Das bedeutet, daß eine Funktion von Koordinaten und Geschwindigkeiten $f(q_i, \dot{q}_i, t)$ eine Konstante ist.

Wir betrachten hier zwei Fälle

1) Zeitunabhängigket der Lagrangefunktion, d. h. die Lagrangefunktion ist nicht explizit von der Zeit abhängig $L = L(q, \dot{q})$. Leiten wir die Lagrangefunktion nach der Zeit ab:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$$

Berücksichtigen wir jetzt, daß $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, und stellen den Ausdruck $\frac{\partial L}{\partial q}$ durch Lagrangegleichungen dar, so erhalten wir

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q})$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = const$$

Die physikalische Bedeutung dieser Größe können wir für übliche Systeme feststellen: für $L = T - U = m\dot{q}^2/2 - U(q)$ haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - T + U = T + U = E$$

Das ist der Energieerhaltungssatz.

2) Betrachten wir jetzt eine allgemeine Koordinatentransformation, wobei die Zeit unverändert ist:

$$Q_i = Q_i(q, t, \epsilon)$$

Wichtig ist, daß diese Transformation stetig vom Parameter ϵ abhängt und der Parameterwert $\epsilon = 0$ der identischen Transformation $Q_i(q, t, 0) = q_i$ entspricht. Dann können wir in erster Näherung in ϵ

$$Q_i = q_i + \epsilon\psi_i(q, t)$$

schreiben, wobei die Funktion ψ die infinitesimale Transformation definiert.

Im allgemeinen ist die neue Lagrangefunktion $\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t, \epsilon)$ von ϵ abhängig. Wenn diese Abhängigkeit verschwindet, bedeutet das Invarianz oder Symmetrie der Lagrangefunktion bezüglich dieser Transformation. Schreiben wir jetzt diese Bedingung explizit:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \epsilon}$$

Aus Bewegungsgleichungen folgt $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}$. Außerdem können wir $\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \epsilon}$ als $\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon}$ schreiben. Also erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dt}\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon}$$

Wenn wir die Ableitung nach ϵ bei $\epsilon = 0$ berechnen, dann gilt $\frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon} = \psi_i(q, t)$, $\mathcal{L} = L$ und $Q_i = q_i$. Die Erhaltungsgröße ist dann

$$C = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\psi_i$$

Betrachten wir die wichtigsten Beispiele.

Wenn L von Koordinate q_i unabhängig ist, dann ist L unter der Transformation $Q_i = q_i + \epsilon$ invariant, das entspricht $\psi_i = 1$. Wir erhalten

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

die schon bekannte Erhaltung des Impulses.

Die Symmetrie unter Rotation um die z-Achse.

In kartesischen Koordinaten ist, z. B., diese Lagrangefunktion so invariant:

$$L = T - U(x^2 + y^2, z)$$

Die Rotation kann man als

$$X = x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, \qquad Y = x\sin\epsilon + y\cos\epsilon$$

schreiben. Die infinitesimale Transformation ist

$$X = x - y\epsilon, \qquad Y = y + x\epsilon$$

Das ergibt

$$\psi_x = -y, \qquad \psi_y = x$$

Die Erhaltungsgröße ist

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\psi_y = m\dot{x}(-y) + m\dot{y}x = L_z$$

die z-Komponente des Drehimpulses.

Wir können jetzt die wichtigsten Symmetrien mit Erhaltungssätzen verbinden:

Homogenität der Zeit – Energiesatz
Homogenität des Raums – Impulssatz
Isotropie des Raums – Drehimpulssatz

Bemerkung: Dies gilt nur für kontinuierliche Symmetrien, diskrete Symmetrien (z.B. $x \to -x$) entsprechen keinen Erhaltungsgrößen, weil es hier keinen kontinuierlichen Parameter ϵ gibt.

Kapitel 3

Lineare Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

Wir betrachten ein System mit n Freiheitsgraden, die durch die verallgemeinerten Koordinaten $q_1, ..., q_n$ beschrieben werden. Sei die Lagrangefunktion des Systems von der Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(q_1, ..., q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, ..., q_n)$$

Bei $q_1 = q_1^0, ..., q_n = q_n^0$ habe das System eine stabile Gleichgewichtslage. Wir entwickeln die potentielle Energie um diese Stelle

$$U(q_1, ..., q_n) = U(q_1^0, ..., q_n^0) + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

Der lineare Term fällt weg, da in der Gleichgewichtslage das Potential ein Minimum hat. Außerdem lassen wir den unwesentlichen konstanten Term weg. Für kleine Auslenkungen erhalten wir somit

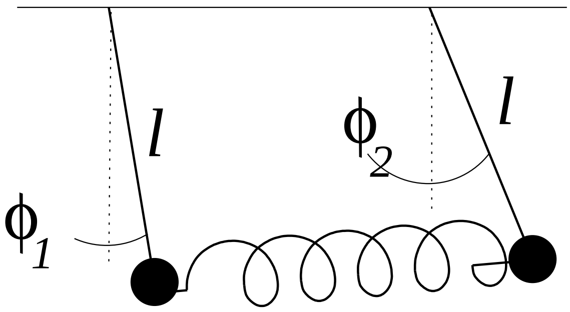
$$U \approx \frac{1}{2} \sum V_{ij} x_i x_j, \qquad V_{ij} = V_{ji} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$$

In der kinetischen Energie ist bereits der niedrigste Term quadratisch in der Auslenkung

$$T \approx \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q_1^0, ..., q_n^0) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \qquad T_{ij} = T_{ji}$$

Also erhalten wir die Lagrangefunktion in der Form

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum (T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j)$$



Beispiel 3.1 *Zwei gekoppelte Pendel (1)*
Nehmen wir die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 als verallgemeinerte Koordinaten. Dann

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi_1}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi_2}^2$$

und

$$U = -mgl\cos\phi_1 - mgl\cos\phi_2 + \frac{k}{2}(-l\sin\phi_1 + l\sin\phi_2)^2$$

Die Gleichgewichtslage ist $\phi_1 = \phi_2 = 0$ und die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen lautet

$$L = \frac{1}{2}\sum (T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_i x_j)$$

wobei

$$T_{11} = ml^2, \quad T_{22} = ml^2, \quad T_{12} = T_{21} = 0$$
$$V_{11} = mgl + kl^2 \quad V_{22} = mgl + kl^2 \quad V_{12} = V_{21} = -kl^2$$

Schreiben wir jetzt die Bewegungsgleichungen (Lagrangesche Gleichungen 2. Art) aus

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\ddot{x}_j + V_{ij}x_j = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Das ist ein System von n linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir suchen eine Lösung in der Form

$$x_j(t) = a_j \cos\omega t, \qquad \ddot{x}_j = -a_j\omega^2\cos\omega t$$

und setzen sie in die Gleichungen ein:

$$\sum_{j=1}^{n}(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij})a_j\cos\omega t = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Diese Gleichungen sollen für alle t erfüllt sein, deshalb

$$\sum_{j=1}^{n}(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij})a_j = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Größen $a_1, ..., a_n$. Es gibt zwei Möglichkeiten:
1) Die Determinante $|-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}|$ verschwindet nicht, dann ist die triviale Lösung $a_j = 0$ die einzige Lösung.
2) Die Determinante $|-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}|$ verschwindet, dann ist eine nichttriviale Lösung möglich.

Wir haben also die Gleichung

$$|-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}| = 0$$

die die mögliche Frequenzen definiert. Diese sogenannte "charakteristische" oder "säkulare" Gleichung ist eine Gleichung von Grade n in ω^2. Diese Gleichung erlaubt uns, n Frequenzen zu finden.

Beispiel 3.2 *Zwei gekoppelte Pendel (2)*
Wir schreiben die Determinante als

$$\begin{vmatrix} mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0$$

Die algebraische Gleichung 2. Grades lautet

$$\omega^4 m^2 l^4 - \omega^2(2ml^2(mgl + kl^2)) + (mgl + kl^2)^2 - k^2 l^4 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung heißen Eigenfrequenzen. Betrachten wir eine Eigenfrequenz ω_k. Wenn wir diesen Wert in die Gleichungen für Amplituden einsetzen, erhalten wir das System

$$\sum_{j=1}^{n} (-\omega_k^2 T_{ij} + V_{ij}) a_j = 0$$

Dieses System läßt uns die Amplituden bestimmen, sei diese Lösung $a_j^{(k)}$. Die Eigenvektoren $a_j^{(k)}$ sind nicht eindeutig festgelegt, man kann sie mit einer Konstante multiplizieren.

Wir nutzen jetzt die Eigenvektoren, um die Normalkoordinaten einzuführen:

$$x_i = \sum_k a_i^{(k)} Q_k \qquad \dot{x}_i = \sum_k a_i^{(k)} \dot{Q}_k$$

Setzen wir jetzt diesen Ausdruck in die Lagrangefunktion ein:

$$L = \sum_{i,j} T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j$$

Kinetische Energie

$$\sum_{i,j} T_{ij} \sum_k a_i^{(k)} \dot{Q}_k \sum_m a_j^{(m)} \dot{Q}_m = \sum_{k,m} \sum_{i,j} T_{ij} a_i^{(k)} a_j^{(m)} \dot{Q}_k \dot{Q}_m$$

Wir finden jetzt der Wert von

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_i^{(k)} a_j^{(m)}$$

Schreiben wir die zwei Gleichungen für Eigenvektoren k und m:

$$\omega_k^2 \sum_j T_{ij} a_j^{(k)} = \sum_j V_{ij} a_j^{(k)}$$

$$\omega_m^2 \sum_j T_{ij} a_j^{(m)} = \sum_j V_{ij} a_j^{(m)}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $a_i^{(m)}$ und addieren alle n Gleichungen. Genauso multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $a_i^{(k)}$ und addieren alle n Gleichungen. Dann erhalten wir

$$\omega_k^2 \sum_{ij} T_{ij} a_j^{(k)} a_i^{(m)} = \sum_{ij} V_{ij} a_j^{(k)} a_i^{(m)}$$

$$\omega_m^2 \sum_{ij} T_{ij} a_j^{(m)} a_i^{(k)} = \sum_{ij} V_{ij} a_j^{(m)} a_i^{(k)} \tag{3.1}$$

Weil $T_{ij} = T_{ji}$ und $V_{ij} = V_{ji}$ symmetrische Matrizen sind, können wir die Indizes in erster Gleichung vertauschen. Die Differenz der beiden Gleichungen ist dann

$$(\omega_k^2 - \omega_m^2) \sum_{ij} T_{ij} a_j^{(m)} a_i^{(k)} = 0$$

Wir nehmen zunächst an, daß die Eigenfrequenzen nicht entartet sind, also $\omega_m \neq \omega_k$ für $m \neq k$. Für $m \neq k$ muß dann die Summe verschwinden. Für $m = k$ können wir den Eigenvektor so normieren, daß die Summe gleich 1 ist. Dann erhalten wir

$$\sum_{ij} T_{ij} a_j^{(m)} a_i^{(k)} = \delta_{km} = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ 1 & k = m \end{cases}$$

(δ_{km} ist analog zur Deltafunktion). Mann kann diese Relation als eine verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation für die Eigenvektoren betrachten.

Potentielle Energie

Die potentielle Energie in neuen Koordinaten lautet

$$\sum_{i,j} V_{ij} \sum_k a_i^{(k)} Q_k \sum_m a_j^{(m)} Q_m = \sum_{k,m} \sum_{i,j} V_{ij} a_i^{(k)} a_j^{(m)} Q_k Q_m$$

Entsprechend (1) ist das gleich zu

$$\omega_m^2 \sum_{ij} T_{ij} a_j^{(m)} a_i^{(k)} = \omega_m^2 \delta_{km}$$

Endgültig erhalten wir die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \sum_{km} \delta_{km} \dot{Q}_k \dot{Q}_m - \omega_m^2 \delta_{km} Q_k Q_m = \sum_m \dot{Q}_m^2 - \omega_m^2 Q_m^2$$

Für neue Normalkoordinaten Q_m erhalten wir die entkoppelten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{Q}_m + \omega_m^2 Q_m = 0$$

Die Lösung ist die harmonische Schwingung, die als Eigenmode oder Eigenschwingung bezeichnet wird. Die allgemeine Lösung ist eine beliebige Überlagung von Eigenschwingungen.

Mathematisch gesehen, sind T und V quadratische Formen. Mit Hilfe von Normalkoordinaten diagonalisiert man diese zwei Formen gleichzeitig. Das ist nur möglich, weil die beide Formen positiv definiert sind, d. h. für beliebige x_i

$$\sum_{ij} T_{ij} x_i x_j > 0, \qquad \sum_{ij} V_{ij} x_i x_j > 0$$

Physikalisch bedeutet das, daß sowohl die kinetische als auch potentielle Energie für alle mögliche Geschwindigkeiten und Auslenkungen positiv sind. Aus dieser Eigenschaft folgt, daß die Eigenfrequenzen immer reell sind, weil

$$\omega_m^2 = \frac{V_{ij} a_i^{(m)} a_j^{(m)}}{T_{ij} a_j^{(m)} a_i^{(m)}} > 0$$

gilt.

Beispiel 3.3 *Zwei gekoppelte Pendel (3)*

1) Finden wir die Eigenvektoren:
Erste Eigenfrequenz $\omega_1^2 = g/l$:

$$(mgl + kl^2 - (g/l)ml^2) a_1^{(1)} - kl^2 a_2^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1^{(1)} = a_2^{(1)}$$

Normierungsbedingung:

$$T_{11}(a_1^{(1)})^2 + T_{22}(a_2^{(1)})^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (a_1^{(1)})^2 = \frac{1}{T_{11} + T_{22}} = \frac{1}{2ml^2} = (a_2^{(1)})^2$$

Zweite Eigenfrequenz $\omega_2^2 = g/l + 2k/m$:

$$(mgl + kl^2 - (g/l)ml^2 - 2(k/m)ml^2) a_1^{(2)} - kl^2 a_2^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1^{(1)} = -a_2^{(1)}$$

Normierungsbedingung:

$$(a_1^{(2)})^2 = \frac{1}{T_{11}+T_{22}} = \frac{1}{2ml^2} = (a_2^{(2)})^2$$

2) Fügen wir die Normalkoordinaten ein

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}}Q_1 + \frac{1}{\sqrt{2ml^2}}Q_2$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}}Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2ml^2}}Q_2$$

3) Setzen wir diese Ausdrücke in die Lagrangefunktion ein

$$2L = ml^2\dot{x}_1^2 + ml^2\dot{x}_2^2 - (mgl + kl^2)x_1^2 - (mgl + kl^2)x_2^2 + 2kl^2x_1x_2 =$$

$$= \dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2-(\frac{mgl+kl^2}{ml^2})(Q_1^2+Q_2^2)+\frac{2kl^2}{2ml^2}(Q_1^2-Q_2^2) = \dot{Q}_1^2-(g/l)Q_1^2+\dot{Q}_2^2-(g/l+2k/m)Q_2^2$$

4) Analysieren wir die Eigenmoden:
Mode 1: $Q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$
Mode 2: $Q_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2$

3.1 Lagrangefunktion für elektromechanische Systeme

Die Lagrangefunktion des elektromagnetisches Feldes lautet

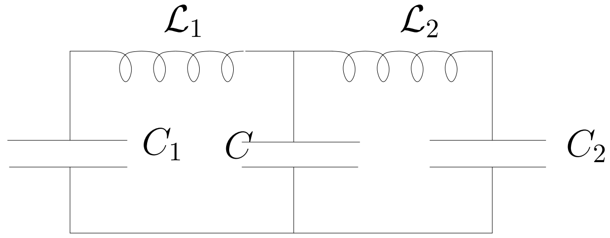
$$L = \frac{1}{8\pi}\int dV\,(\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2$$

wobei $\mathcal{H}$ und $\mathcal{E}$ magnetisches und elektrisches Felder sind. Für einfache Systeme hat endliche Anzahl von Freiheitsgraden. Einem Kondesator mit Kapazität C ordnet man die potentielle Energie $\frac{q^2}{2C|}$. Einer Spule mit dem Strom $\dot{q}$ ordnet man die kinetische Energie $\frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2}$ zu. Insgesamt ist die Lagrangefunktion eines einfachen Schaltkreises

$$L = \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C}$$

was die lineare Schwingungen mit der Frequenz $\omega = 1/\sqrt{\mathcal{L}C}$ ergibt.

Beispiel 3.4 *Gekoppelter Schaltkreis*



In diesem Beispiel muss man berücksichtigen, dass $q = -q_1 - q_2$. *Dies Ergibt*

$$L = \frac{\mathcal{L}_\infty \dot{q}_1^2}{2} + \frac{\mathcal{L}_\in \dot{q}_2^2}{2} - \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_2^2}{2C_2} - \frac{(q_1+q_2)^2}{2C}$$

Beispiel 3.5 *Elektromechanische Kopplung I*

Es kann sein, dass die Kapazität veränderlich ist. Falls eine Plastine des Kondensators ein Pendel ist, dann $C = C(\phi)$ *und*

$$L = \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} + mgl\cos\phi - \frac{q^2}{2C(\phi)}$$

Bei der Betrachtung mechanischen Schwingungen muss man elektrische Kraft berücksichtigen:

$$ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi + \frac{q^2\frac{dC}{d\phi}}{2C^2}$$

Beispiel 3.6 *Elektromechanische Kopplung II*

Es kann sein, dass die Induktivität veränderlich ist. Falls ein Stab in der Spule mit einer Feder verbunden ist ist, dann $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x)$ *und*

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}(x)\dot{q}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{q^2}{2C}$$

Bei der Betrachtung mechanischen Schwingungen muss man magnetische Kraft berücksichtigen:

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{\dot{q}^2\frac{d\mathcal{L}}{dx}}{2}$$

Kapitel 4

Hamiltonsche Mechanik

4.1 Legendre-Transformation und Hamiltonsche Gleichungen

Das Lagrange-Formalismus liefert uns die Bewegungsgleichungen in der Form von einem System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung für verallgemeinerte Koordinaten. Solches System beschreibt das physikalische System zwar vollständig, ist aber nicht so günstig für Untersuchungen:

1) Das System hat nicht die Form $\dot{x}_i = F_i(x)$ eines Systems von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung.

2) Es ist nicht einfach, die Erhaltungsgröße zu nutzen, weil die Grade des System wird nicht gleich reduziert werden.

3) Die Lagrangefunktion hat keine direkte physikalische Bedeutung, deshalb ist dieses Konzept an Experimentatoren schwer vermittelbar.

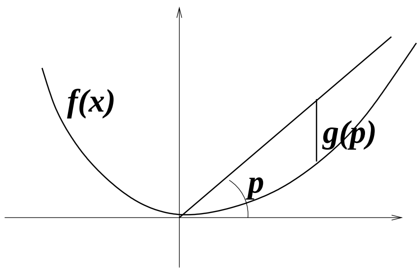
Alle diese Nachteile werden im Hamiltonformalismus bewältigt. Eigentlich wird dieser Formalismus in 4/5 theoretischer Physik benutzt, insbesondere in der Quantenmechanik und in der statistischen Physik.

Wir fangen mit dem Ziel an, das System Differentialgleichungen 1. Ordnung zu schreiben. Weil die Lagrangegleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

die Idee ist, der verallgemeinerte Impuls p_i als unabhängige Koordinate zu nehmen. Falls wir auch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ zugunsten der verallgemeinerten Impulse eliminieren, können wir ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung erhalten. Manchmal ist die Beziehung zwischen Geschwindigkeiten und Impulsen einfach ($p = m\dot{q}$), aber wir sollen ein Rezept für alle Fälle haben. Dies wird mit Hilfe der Legendre-Transformation gemacht.

4.1.1 Legendre-Transformation



Sei $f(x)$ eine konvexe Funktion. Wir führen eine neue Funktion $g(p)$ ein als

$$g(p) = \max_x (px - f(x))$$

Die Bedingung für ein Maximum lautet

$$\frac{d}{dx}(px - f(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{df}{dx}$$

Das bedeutet, daß wir die Transformation so schreiben können

$$g(p) = px - f(x), \qquad \text{wobei} \quad p = \frac{df}{dx}$$

Diese Transformation heißt Legendre-Transformation. Weil p von x abhängig ist, können wir die Gleichung nach x ableiten

$$\frac{dg}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}x + p - \frac{df}{dx}$$

Also erhalten wir

$$x = \frac{dg}{dp}$$

Das heißt, daß die Legendre-Transformation völlig symmetrisch ist

$$g(p) + f(x) = px, \quad x = \frac{dg}{dp}, \quad p = \frac{df}{dx}$$

In anderen Worten, zwei mal angewandte Legendre-Transformation ist die identische Transformation.

Beispiel 4.1 *Quadratische Funktion*

$$f(x) = ax^2 \quad \Rightarrow \quad p = 2ax \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{2a} \quad \Rightarrow \quad g(p) = px - f(x) = \frac{p^2}{4a}$$

Die Legendre-Transformation wird in der statistischen Physik viel benutzt. Hier verwenden wir sie zum Übergang von Geschwindigkeit zum Impuls. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
f(x) &\leftrightarrow L(q, \dot{q}, t) \\
x &\leftrightarrow \dot{q} \\
p = \frac{df}{dx} &\leftrightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
g(p) = px - f(x) &\leftrightarrow H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \\
x = \frac{dg}{dp} &\leftrightarrow \dot{q} = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p}
\end{aligned}$$

Wir haben fast alles erhalten was wir brauchen, nun sollen wir die Lagrange-Gleichung

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

selbst umschreiben. Wir berechnen die partielle Ableitung von H nach der verallgemeinerten Koordinate q:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial p\dot{q}(q,p,t)}{\partial q} - \frac{\partial L(q,\dot{q}(q,p,t),t)}{\partial q} = (p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p}$$

Engültig haben wir jetzt statt der Lagrangefunktion die Funktion H, die von verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen abhängt, und das Gleichungssystem

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q}$$

liefert. Diese Funktion heißt Hamilton-Funktion und die Gleichungen heißen Hamiltonsche bzw. kanonische Gleichungen. Die Koordinaten und Impulse bezeichnet man als kanonische Variablen. Die Hamiltonfunktion wird als Legendre-Transformation der Lagrangefunktion

$$H = p\dot{q} - L$$

erhaltet. Diesen Ausdruck haben wir schon gesehen: Das ist genau die verallgemeinerte Energie, die erhalten bleibt, falls die Lagrangefunktion zeitunabhängig ist. Also die physikalische Bedeutung des Hamiltonfunktion ist klar: das ist Energie, die als Funktion von verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen geschrieben ist. Zeigen wir jetzt, daß der Wert der Hamiltonfunktion erhalten ist, wenn die Funktion nicht explizit von der Zeit abhängig ist:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Es ist zu betonen, daß die Hamiltonfunktion eine Funktion der kanonischen Variablen sein muß (z.B. $H(q,\dot{q},t)$ ist *keine* Hamiltonfunktion).

Beispiel 4.2 *Teilchen in einem Potential*

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x,y,z)$$

Der verallgemeinerte Impuls ist

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}$$

und die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x,y,z)$$

Beispiel 4.3 *Teilchen im elektromagnetischen Feld*

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{q}}^2 - e\phi + \frac{e}{c}(\dot{\vec{q}}\vec{A})$$

Der verallgemeinerte Impuls ist

$$\vec{p} = m\dot{\vec{q}} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

Wir setzen also

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})$$

in die Hamiltonfunktion ein:

$$H = \vec{p}\dot{\vec{q}} - L = \frac{\vec{p}}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) - \frac{m}{2}(\frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}))^2 + e\phi - \frac{e}{c}\frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\vec{A} = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\phi$$

4.1.2 Erhaltungsgrößen

Wenn die Hamiltonfunktion nicht von einer kanonischen Koordinate q_i abhängt, ist der entsprechende Impuls erhalten:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0\ , \qquad p_i = const$$

Man kann dann die Hamiltonfunktion als Funktion von $n - 2$ unabhängigen Variablen betrachten. Das heißt, eine Erhaltungsgröße führt unmittelbar zur Vereinfachung des Systems. Wäre die Hamiltonfunktion von n Koordinaten unabhängig, könnte man das Problem einfach lösen: die kanonischen Impulse sind zeitunabhängig, und die kanonische Koordinaten sind lineare Funktionen von Zeit.

4.2 Poissonklammer

Wir betrachten zwei Größen, die von kanonischen Variablen abhängig sind: $F(q, p, t)$ und $G(q, p, t)$. Die Poissonklammer wird durch

$$[F, G] = \sum_1^n (\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i})$$

definiert. Die Poissonklammer ist wieder eine Funktion von kanonischen Variablen und Zeit. Aus der Definition folgt sofort

$$[F, G] = -[G, F], \qquad [F, F] = 0$$

Für die einfachste Funktionen erhalten wir

$$F = q_i,\ G = q_j \quad \Rightarrow \quad [q_i, q_j] = 0$$

$$F = p_i,\ G = p_j \quad \Rightarrow \quad [p_i, p_j] = 0$$

$$F = q_i,\ G = p_j \quad \Rightarrow \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

Berechnen wir nun die Zeitabhängigkeit einer beliebigen physikalischen Größe $F(q, p, t)$ wobei q, p kanonische Gleichungen erfüllen:

$$\frac{dF}{dt} = \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]$$

Diese Gleichung hat zwei Folgen:
1) Die Bewegungsgleichungen können mit Hilfe von Poissonklammern als

$$\dot{p} = [p, H], \qquad \dot{q} = [q, H]$$

geschrieben werden.
2) Für die Erhaltungsgrößen gilt

$$F(p, q) = const \qquad \Leftrightarrow \qquad [F, H] = 0$$

Für drei beliebige Größen A, B, C beweist man die Jacobische Identität:

$$\big[[A, B], C\big] + \big[[B, C], A\big] + \big[[C, A], B\big] = 0$$

Diese Identität hat eine wichtige Folge: Die Poissonklammer aus zwei Bewegungsintegralen F_1, F_2 ist wieder ein Bewegungsintegral. Wir schreiben

$$\big[[F_1, F_2], H\big] = -\big[[F_2, H]F_1\big] - \big[[F_1, H]F_2\big] = 0$$

Beispiel 4.4 <u>*Drehimpuls*</u>
Schreiben wir der Drehimpulskomponenten dar

$$M_1 = q_2 p_3 - p_2 q_3, \qquad M_2 = p_1 q_3 - q_1 p_3, \qquad M_3 = q_1 p_2 - p_1 q_2$$

und berechnen die Poissonklammer

$$[M_1, M_2] = \frac{\partial M_1}{\partial q_3}\frac{\partial M_2}{\partial p_3} - \frac{\partial M_1}{\partial p_3}\frac{\partial M_2}{\partial q_3} = q_1 p_2 - q_2 p_1 = M_3$$

Das bedeutet, daß die Erhaltung von zwei Komponenten des Drehimpulses auch Erhaltung der dritten Komponente erzwingt.

Man kann die Poissonklammern benutzen, um die neue Bewegungsintegrale zu finden; manchmal aber erhält man wieder alte Erhaltungsgrößen oder z.B. Null.

4.3 Der Phasenraum, die Sätze von Liouville und Poincaré

Der Phasenraum ist eine natürliche Form von Darstellung der Bewegungen in Hamiltonschen Systemen, weil sie Systeme gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung sind. Also können wir jedem Zustand einen Punkt in einem abstrakten, $2n$-dimensionalen Raum zuordnen, der durch $2n$ kartesischen Koordinatenachsen für die Größen q_i und p_i aufgespannt wird.

Bemerkung: In der Theorie der Differentialgleichungen kann man für jedes System von Differentialgleichungen den Phasenraum konstruieren. In der theoretischen Physik aber wird nur der Raum kanonischer Variablen Phasenraum genannt.

Wir diskutieren jetzt die allgemeinen Eigenschaften der Phasenraumdynamik. Für ein System mit n Freiheitsgraden hat man den Phasenraum mit $2n$ Dimensionen. Wenn das System autonom (zeitunabhängig) ist, ist die Energie erhalten. Deshalb findet die Bewegung auf einer $2n-1$-dimensionale Oberfläche $H(p,q) = E$ statt.

4.3.1 Der Liouvillesche Satz

Das Phasenvolumen ist erhalten. Diese Erhaltungsgröße ist nicht das übliche Bewegungsintegral, weil das Volumen keine Funktion von kanonischen Koordinaten ist.

Wir leiten erst die Formel für Volumenänderung für eine beliebige System von Differentialgleichungen her:

$$\dot{x}_i = F_i(x)$$

Nehmen wir ein kleines Volumen

$$\Delta v = \Delta x_1 \Delta x_2 ... \Delta x_n$$

und leiten des nach der Zeit ab:

$$\frac{d\Delta v}{dt} = \frac{d\Delta x_1}{dt}\Delta x_2 ... \Delta x_n + ... + \Delta x_1 \Delta x_2 ... \frac{d\Delta x_n}{dt}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = F_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n) - F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1$$

ist, dann erhalten wir

$$\frac{d\Delta v}{dt} = (\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n})\Delta v$$

Für das Hamiltonsche System

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

gilt

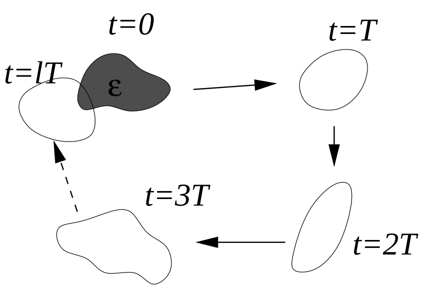
$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = 0$$

was den Liouvilleschen Satz beweist. Als eine Verallgemeinerung kann man auch den Erhaltung von Poincaré-Invarianten

$$(\Delta v)^{(2)} = \Delta q_i \cdot \Delta p_i, \qquad (\Delta v)^{(4)} = \Delta q_i \cdot \Delta p_i \Delta q_j \cdot \Delta p_j, ...$$

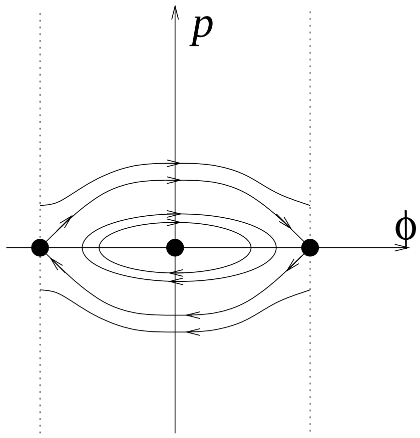
beweisen.

4.3.2 Der Poincarésche Satz



Dieser “Wiederkehrsatz” bestimmt die allgemeinen Wiederholungseigenschaften der mechanischen Bewegung. Sei der Phasenraum kompakt, d. h. er hat ein beschränktes Volumen. Z. B. man kann sich die Teilchen mit Wechselwirkung in einem Kasten vorstellen; weil die Energie erhalten ist, ist das Phasenvolumen begrenzt. Die Frage kann man so formulieren: wenn die Bewegung von der Anfansbedingungen q_i^0, p_i^0 anfängt, kann man irgendwo wieder diesen oder fast diesen Zustand beobachten? Die Antwort ist: diese Rückkehr wird für fast alle Anfangsbedingungen beobachtet. Um dies zu Beweisen, nehmen wir an, daß es eine Menge von Anfangsbedingungen gibt, die nicht zurückkehren, und diese Menge hat das Volumen ε. Nehmen wir einen größen Zeitabstand T und betrachten dieses Anfangsvolumen zur Zeiten T, $2T$,.... Entsprechend Liouvilleschen Satz ist das Volumen ε erhalten, deshalb ist es unmöglich, daß sich keine von Mengen zur Zeiten T, $2T$, ... schneiden. Wenn es aber eine Schneidung zur Zeit kT gibt (d.h. die Menge kT schneidet die Menge nT für irgendwelche $n > k$), dann gibt auch eine Schneidung zur Zeit $(k-1)T$ etc, also auch eine Schneidung für $k = 0$. Das aber widerspricht unsere Einnahme, und der Satz ist bewiesen.

Folge: wenn alle Teilchen eines Gases zur Zeit $t = 0$ in einem kleinem Abteil des Kasten sich finden, dann wird diese Zustand irgendwann wieder beobachtet werden.



Beispiel 4.5 Das Pendel
Der Phasenraum wird kompakt, wenn wir das System auf einem Zylinder $0 \leq \phi < 2\pi$ *betrachten. Alle Zustände, mit Ausnahme der Separatrixen, wiederholen sich.*

4.4 Kanonische Transformationen

In der Lagrangeschen Mechanik kann man aus dem Hamiltonschen Variazionsprinzip die Invarianz von Lagrange-Gleichungen zu Variabletransformationen

$$Q_i = Q_i(q)$$

herleiten. In der Hamiltonschen Mechanik benutzen wir eine andere Form vom Hamilton-Prinzip, um mehr allgemeine kanonische Transformationen zu erhalten.

4.4.1 Prinzip der stationären Wirkung

Das Prinzip der stationären Wirkung lautet

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) = 0$$

Wir betrachten jetzt S als ein Funktional der $2n$ unabhängigen Koordinaten q und p mit Randbedingungen $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, $\delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$. Dann können wir schreiben

$$\delta S(q,p) = \int_{t_1}^{t_2} dt(\delta p \cdot \dot{q} + p\delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q) = 0$$

Wenn wir $p\delta\dot{q}$ durch partielle Integration zu $-\dot{p}\delta q$ umformen, erhalten wir

$$\delta S(q,p) = \int_{t_1}^{t_2} dt(\delta p(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}) - \delta q(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q})) = 0$$

was die Hamiltonschen Gleichungen ergibt.

Machen wir jetzt eine Transformation zu neuen Variablen

$$q_i, p_i \quad \rightarrow \quad Q_i, P_i$$

mit der Bedingung, daß die Bewegungsgleichungen in neuen Koordinaten auch Hamiltonsche Gleichungen sind, eventuell mit neuen Hamiltonfunktion $\tilde{H}$. Das heißt, daß nach dem Prinzip der stationären Wirkung gilt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H)\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (P\dot{Q} - \tilde{H})\, dt$$

Diese Bedingung ist erfüllt, falls die Integranden sich um die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion unterscheiden:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q,P,t) + \frac{d}{dt} F(q,p,Q,P,t)$$

Wir zeigen jetzt, daß es genügt, die Funktion F als eine Funktion von $2n$ Variablen (teilweise alten, teilweise neuen) und der Zeit zu haben, um die Transformation zu definieren. Die Funktion wird Erzeugende genannt.

1) Wir betrachten zuerst die Möglichkeit $F = F_1(q, Q, t)$ und setzen

$$\frac{d}{dt} F_1(q,Q,t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i$$

in die allgemeine Gleichung an. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \qquad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Dies sind $2n$ Gleichungen, die Beziehung zwischen alten und neuen Variablen vollständig definieren.

2) Es gibt auch eine andere Möglichkeit, die Variablen in der Erzeugenden zu definieren, nämlich alte Koordinaten und neue Impulse:

$$F = F_2(q, P, t)$$

Dann ist die totale Ableitung nach Zeit

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i$$

Wenn wir die Bedingung für kanonische Transformation als

$$\sum (p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}) \dot{q}_i - H = \sum (-Q_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}) \dot{P}_i - \tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt} (\sum Q_i P_i)$$

umschreiben, dann erhalten wir die kanonische Transformation in der Form

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Auch die Erzeugenden $F_3(p, Q, t)$ und $F_4(p, P, t)$ werden benutzt.

Beispiel 4.6 *Kanonische Transformation 1*
Sei

$$F_1 = \sum q_i Q_i$$

dann

$$p_i = Q_i, \qquad P_i = -q_i$$

Das Beispiel zeigt, daß beim Hamilton-Formalismus Impuls und Ortskoordinate völlig gleichwertige Rollen spielen.

Beispiel 4.7 *Kanonische Transformation 2*
Betrachten wir den harmonischen Oszillator mit der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

Wir versuchen die Amplitude und die Phase als neue Koordinaten nehmen, also

$$q = A \sin\phi \qquad p = bA\cos\phi$$

Wir schreiben $A = P$ und $\phi = Q$, und suchen die Erzeugende $F_1(q, Q)$. Es soll gelten

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = bP\cos Q = bq\frac{\cos Q}{\sin Q}$$

Die Integration ergibt

$$F_1 = bq^2\frac{\cos Q}{\sin Q}$$

Wenn wir jetzt die Amplitude berechnen, dann erhalten wir

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = bq^2\frac{1}{\sin^2 Q}$$

was mit unserer Annahme nicht übereinstimmt:

$$q = \sqrt{P/b}\sin Q$$

Das bedeutet, daß nicht die Amplitude A, sondern das Quadrat A^2 die kanonische Variable sein muß. Also aus der Erzeugenden

$$F_1 = bq^2\frac{\cos Q}{\sin Q}$$

erhalten wir

$$P = b\frac{q^2}{\sin^2 Q}, \quad p = 2bq\frac{\cos Q}{\sin Q}$$

Wählen wir $b = \sqrt{km}/2$, *dann erhalten wir*

$$\tilde{H} = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \omega P$$

wobei $\omega = \sqrt{k/m}$. *Das bedeutet, daß* Q *eine zyklische Koordinate ist. Die Bewegungsgleichungen lauten*

$$\dot{P} = 0, \qquad \dot{Q} = \omega$$

und die Lösung ist

$$P = const, \qquad Q = \omega t + Q_0$$

Beispiel 4.8 *Kanonische Transformation 3*
Sei

$$F_2 = \sum q_i P_i$$

dann

$$p_i = P_i, \qquad Q_i = q_i$$

und wir erhalten eine identische Transformation. Betrachten wir eine fast identische Transformation mit der Erzeugenden

$$F_2 = \sum q_i P_i + \varepsilon G(q, P)$$

Dann lautet die Transformation

$$p_i = P_i + \varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}, \qquad Q_i = q_i + \varepsilon\frac{\partial G}{\partial P_i}$$

Nehmen wir $G(q, P) = H(q, P)$, *dann*

$$Q_i = q_i + \varepsilon\frac{\partial H(q, P)}{\partial P_i}, \qquad P_i = p_i - \varepsilon\frac{\partial H(q, P)}{\partial q_i}$$

Wenn wir auch $\varepsilon = dt$ *nehmen, dann erhalten wir im Grenzwert* $dt \to 0$ *genau die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:*

$$q_i(t+dt) = q_i(t) + dt\frac{\partial H(q(t), p(t+dt))}{\partial p_i}, \qquad p_i(t+dt) = p_i(t) - dt\frac{\partial H(q(t), p(t+dt))}{\partial q_i}$$

Für

$$H = \sum \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q_1, ..., q_n)$$

erhalten wir

$$q_i(t + dt) = q_i(t) + dt\frac{p_i(t + dt)}{m_i}$$

$$p_i(t+dt) = p_i(t) - dt\frac{\partial V(q(t))}{\partial q_i}$$

Dieses Gleichungssystem ist einfach lösbar (erst sollen die neue Impulse aus Gl. 2 gefunden werden, und dann die neue Koordinaten). Diese kanonische Transformation liefert ein numerisches Schema zur Lösung von Hamiltonschen Gleichungen. Der Vorteil ist, daß mehrere Eigenschaften bei diesem Schema automatisch erfüllt werden, z. B. der Liouvillesche Satz.

4.5 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir verwenden hier die Theorie der kanonischen Transformationen zur Lösung der Hamilton-Gleichungen. Die Idee ist, so eine Transformation zu finden, die zu einer einfachen oder sogar zu der trivialen Hamiltonfunktion führt. Wir suchen also die Erzeugende $F_2(q, P, t)$, die zu der Hamiltonfunktion

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

führt. Die entsprechende Transformation lautet

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

Die alte Hamiltonfunktion ist von q_i und p_i abhängig, und alle neuen Koordinaten und Impulse sind Konstanten:

$$\dot{Q}_i = 0, \qquad \dot{P}_i = 0$$

Wir setzen $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ in die Gleichung für $\tilde{H}$ ein. Dies ergibt die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H(q_1, ..., q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für eine Funktion der Variablen $q_1, ..., q_n, t$. Seine allgemeine (vollständige) Lösung hängt von n Konstanten ab, diese Konstanten sind eigentlich konstante neue Impulsen P_i. Wenn eine vollständige Lösung bekannt ist, kann man alte Koordinaten und Impulse aus kanonischen Transformation herausfinden.

Die Erzeugende F_2 hat eine spezielle Bedeutung. Wir berechnen die Zeitableitung von F_2:

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} = p_i\dot{q}_i - H$$

Das bedeutet

$$F_2 = \int dt(p_i\dot{q}_i - H) = \int L\, dt = S$$

also F_2 ist die Wirkung. Hier wird die Wirkung als eine Funktion der Koordinaten und der Zeit betrachtet: verschiedene Bahnkurven, die von $t = t^1, q = q^1$ anfangen, ergeben die Wirkung als Funktion der Endkordinate q und der Zeit t, die Hamiltonsche Wirkungsfunktion heißt .

Wenn die Hamiltonfunktion zeitunabhängig ist, kann man die Hamilton-Jacobi-Gleichung vereinfachen. Man setzt

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et$$

in die Gleichung ein und erhält

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E$$

Die Funktion W heißt gekürzte Wirkungsfunktion oder Hamiltonsche charakteristische Funktion. Für die gilt

$$W = S(q, P, t) + Et = \int L dt + Et = \int dt \; (p\dot{q} - H + E)$$

und weil die Hamiltonfunktion von der Zeit unabhängig ist, erhalten wir

$$W = \int dt \; p\dot{q} = \int p \; dq$$

Man kann diese Funktion auch als Erzeugende einer kanonischen Transformation verwenden. Dabei gibt es eine gewisse Freiheit, was als neue Impulse P_i angenommen wird: Man kann auch Funktionen von Konstanten als neue Impulse nehmen.

Beispiel 4.9 Harmonischer Oszillator
Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

und die Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial q})^2 + \frac{kq^2}{2} = E$$

Die Lösung ist

$$W = \sqrt{mk} \int dq \; \sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}$$

Jetzt sollen wir einen neuen Impuls wählen. Als eine Möglichkeit nehmen wir

$$P = E$$

Dann

$$Q = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2P}{k} - q^2}} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos q \sqrt{\frac{k}{2P}}$$

Das ergibt

$$q = \sqrt{2E/k} \cos \sqrt{k/m} Q, \qquad p = \sqrt{2E/k} \sin \sqrt{k/m} Q$$

und in neuen Variablen

$$H = P, \qquad \dot{Q} = 1, \qquad \dot{P} = 0$$

Zwei Bemerkungen zu diesem Beispiel:

1) Die ganze Komplexität des Problems liegt bei diesem Verfahren in der kanonischen Transformation, die neuen Gleichungen sind trivial lösbar.

2) Die neuen kanonischen Variablen P, Q sind eigentlich die Energie $P = E$ und die Zeit $Q = t$. Das stimmt mit der Tatsache, daß aus der Zeitunabhängigkeit der Hamiltonfunktion die Energieerhaltung folgt, überein.

4.6 Wirkungs- und Winkelvariablen

Wir benutzen jetzt die Freiheit, neue Koordinaten und Impulse beim Hamilton-Jacobi-Verfahren zu wählen, um einen bestimmten und wichtigen Variablentyp einzuführen. Betrachten wir einfachkeitswegen ein System mit einem Freiheitsgrad und zeitunabhängiger Hamiltonfunktion $H(q, p) = E$. Dann können wir die Hamiltonsche charakteristische Funktion als

$$W(q, E) = \int p(q, E)\, dq$$

schreiben. Wir wählen jetzt einen solchen neuen Impuls P, daß die neue Koordinate Q bei der periodischen Bewegung sich um 2π ändert. Wenn die Periode T ist, dann

$$Q(T) - Q(0) = 2\pi = \int_0^T \frac{dQ}{dt} dt = \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial P}\, dt = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial P \partial q}\, dq$$

Weiter rechnen wir

$$\oint \frac{\partial^2 W}{\partial P \partial q}\, dq = \frac{\partial}{\partial P} \oint \frac{\partial W}{\partial q}\, dq = \frac{\partial}{\partial P} \oint p\, dq$$

Das bedeutet

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq$$

und der neue Impuls ist definiert als Funktion von Energie. Die neue Hamiltonfunktion lautet

$$H = H(P)$$

und für die Variable Q erhalten wir

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}$$

Weil Q 2π-periodisch ist, nennt man diese Variable Winkel, und die andere Wirkung, und bezeichnet als ϕ, I.

Beispiel 4.10 *Harmonischer Oszillator*

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq = \frac{\sqrt{mk}}{2\pi} \oint \sqrt{2E/k - q^2} \, dq = E\sqrt{m/k}$$

Dies ergibt

$$H = E = \sqrt{k/m} I$$

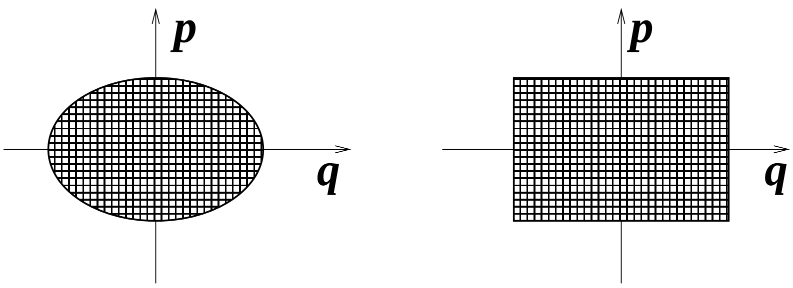
Die Zusammenhang zwischen neuen und alten Variablen erhalten wir wenn die Hamiltonsche charakteristische Funktion aus dem letzten Beispiel betrachtet wird:

$$\phi = \frac{\partial W}{\partial I} = \omega \frac{\partial W}{\partial E} = -\arccos q \sqrt{k/(2\omega I)}$$

Das ergibt

$$q = \sqrt{2\omega I/k} \cos \phi$$

und es ist einfach zu sehen, daß ϕ eine Phase ist.



Beispiel 4.11 *Teilchen zwischen zwei Wänden*
Betrachten wir ein Teilchen, das sich zwischen zwei Wänden (bei $x = 0$ und $x = l$) bewegt, mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Die Wirkungsvariable ist

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq = \frac{pl}{\pi}$$

Die neue Hamiltonfunktion ist

$$H = \frac{I^2\pi^2}{2l^2m}$$

und die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial I} = I\frac{\pi^2}{l^2m}$$

Der letzte Ausdruck ist gerade die Frequenz:

$$\omega = I\frac{\pi^2}{l^2m} = \frac{\pi p}{lm} = \frac{\pi v}{l} = \frac{2\pi}{\frac{2l}{v}} = \frac{2\pi}{T}$$

Beispiel 4.12 *Das Kepler-Problem*
Hier haben wir ein System mit zwei Freiheitsgraden, deshalb erhalten wir zwei Winkel- und zwei Wirkungsvariablen. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}) - a(r)$$

Wir schreiben die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{1}{2m}((\frac{\partial W}{\partial r})^2 + \frac{(\frac{\partial W}{\partial \phi})^2}{r^2}) - a(r) = E$$

und suchen die Lösung in der Form

$$W(r,\phi) = W_r(r) + W_\phi(\phi)$$

Man sagt, dass das Problem separierbar *ist. Nach dem Einsetzen können wir die Gleichungen in zwei Teile separieren (aufteilen), die von r und ϕ abhängen:*

$$r^2\Big[\frac{1}{2m}(\frac{\partial W_r}{\partial r})^2 - a(r) - E\Big] + \frac{1}{2m}(\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi})^2 = 0$$

Daraus folgt, dass diese zwei Teile konstant sind:

$$C = \frac{1}{2m}(\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi})^2 = -r^2\Big[\frac{1}{2m}(\frac{\partial W_r}{\partial r})^2 - a(r) - E\Big]$$

Die erste Gleichung ergibt die Winkelvariable bezüglich ϕ:

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi \, d\phi = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2mC}\, d\phi = \sqrt{2mC}$$

oder

$$C = \frac{I_\phi}{2m}$$

Wir sehen, dass hier die ursprungliche Koordinate ϕ auch die Winkelkoordinate ist, und der ursprungliche Impuls p_ϕ die Wirkungsvariable ist. Dieser Impuls ist der Drehimpuls L.

Für die Koordinate r *erhalten wir*

$$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r\, dr = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2mE + 2ma(r) - \frac{I_\phi^2}{r^2}}\, dr$$

Jetzt betrachten wir eine Verallgeneinerung des Kepler-Problems, nämlich das Potential $a(r) = \alpha/r + \beta/r^2$, *wobei* $\alpha > 0$ *und* β *klein ist. Dann haben wir das Integral*

$$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\sqrt{2mEr^2 + 2m\alpha r - (I_\phi^2 - \beta m)}}{r}\, dr$$

Das Integral ist nicht trivial, aber aus Tabellen finden wir

$$\oint \frac{\sqrt{-Ar^2 + 2Br - C}}{r}\, dr = 2\pi(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}), \qquad A, B, C > 0$$

Das ergibt

$$I_r = \frac{m\alpha}{\sqrt{-2mE}} - \sqrt{I_\phi^2 - \beta m}$$

Wir können jetzt die Energie (die Hamiltonfunktion) als Funktion von Wirkungsvariablen schreiben

$$H = \frac{-m\alpha^2}{2(I_r + \sqrt{I_\phi^2 - \beta m})^2}$$

1) Wenn $\beta = 0$, *haben wir das reine Kepler-Problem mit der Hamiltonfuktion*

$$H = \frac{-m\alpha^2}{2(I_r + I_\phi)^2}$$

Dieses Problem ist entartet, da die beide Frequenzen gleich sind:

$$\omega_\phi = \omega_r = \frac{\partial H}{\partial I_r} = \frac{m\alpha^2}{(I_r + I_\phi)^3}$$

2) Wenn $\beta = 0$, *sind die Frequenzen nicht gleich, und wir haben eine quasiperiodische Bewegung mit ungeschlossenen Bahnen:*

$$\omega_\phi = \frac{\partial H}{\partial I_\phi} = \frac{m\alpha^2}{(I_r + \sqrt{I_\phi^2 - \beta m})^3}\frac{I_\phi}{\sqrt{I_\phi^2 - \beta m}}$$

$$\omega_r = \frac{\partial H}{\partial I_r} = \frac{m\alpha^2}{(I_r + \sqrt{I_\phi^2 - \beta m})^3}$$

Das Verheltnis dieser Frequenzen gibt den Drehwinkel der Trajektorie:

$$\Delta\phi = 2\pi(\frac{\omega_\phi}{\omega_r} - 1) = 2\pi\frac{I_\phi}{\sqrt{I_\phi^2 - \beta m}} \approx 2\pi\frac{\beta m}{2I_\phi^2}$$

4.6.1 Wirkungsvariablen als adiabatische Invarianten

Die Wirkungsvariablen haben eine wichtige Eigenschaft: sie sind erhalten bei einer langsamen Änderung von Systemparametern.

Sei die Hamiltonfunktion vom Parameter λ abhängig, und dieser Parameter ist eine langsame Funktion der Zeit:

$$\lambda = \lambda(t), \qquad \frac{d\lambda}{dt} \sim \varepsilon$$

Für jeden konstanten Wert von λ kann man die Wirkungs- und Winkelvariablen einführen, mit Hilfe der Erzeugenden $W(q, I, \lambda)$. Weil jetzt diese Erzeugende explizit von der Zeit abhängig ist, lautet die neue Hamiltonfunktion

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H(I) + \frac{\partial W(I, \phi, t)}{\partial t} = H(I) + \varepsilon G(I, \phi, t)$$

weil die Veränderung von W langsam ist. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{\phi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial I}, \qquad \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial \phi}$$

Wir lösen diese Gleichungen näherungsweise. In der nullten Näherung $I = const$, $\phi = \omega t + \phi_0$. In der erster Näherung ist die Veränderung von I langsam, deshalb kann man I (und auch λ) während einer Periode von Schwingungen als eine Konstante betrachten. Deshalb können wir schreiben

$$I(t+T) - I(t) = -\varepsilon \int_t^{t+T} \frac{\partial G}{\partial \phi} dt = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \phi}\, d\phi = 0$$

weil G eine periodische Funktion von ϕ ist. Das bedeutet, daß während einer langsamen (adiabatischen) Veränderung eines Parameters die Wirkungsvariable eine Konstante ist. Sie wird damit "Adiabatische Invariante" genannt.

Beispiel 4.13 *Pendel mit langsam geänderter Länge*
Ein Pendel wird mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{q}^2 + mgl \cos q$$

beschrieben. Dann folgt die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q$$

und in der linearen Näherung erhalten wir

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{mgl}{2} q^2$$

Das Phasenportrait ist eine Ellipse mit Achsen

$$p_{max} = \sqrt{2ml^2E}, \qquad q_{max} = \sqrt{\frac{2E}{mgl}}$$

Deshalb lautet die Wirkungsvariable

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq = \frac{1}{2}p_{max}q_{max} = \frac{1}{2}ml^{3/2}g^{1/2}q_{max}^2$$

Wenn die Länge l langsam verändert wird, ändert sich auch die Auslenkung q_{max}, und zwar

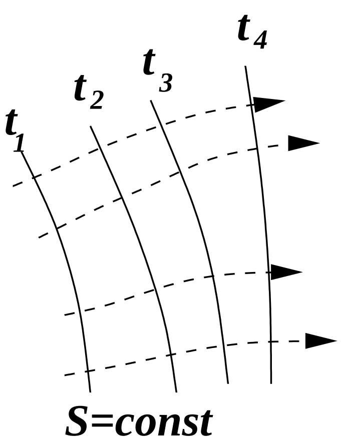
$$q_{max}^4 l^3 = const, \qquad El^{1/2} = const$$

4.7 Geometrische Optik und Punktmechanik

Wir erinnern uns hier an die wesentlichen Ideen der geometrischen Optik. Es gibt zwei Beschreibungsmöglichkeiten: mit Lichtsrahlen und mit Wellenfronten.

Für Lichtstrahlen gilt das Fermatsche Prinzip: ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten nimmt einen solchen Weg, für den die benötigte Zeit am kürzesten ist. Lokale Ausbreitungsgeschwidigkeit wird durch den Brechungsindex n definiert, der von der Ortskoordinate und manchmal von der Richtung abhängig ist.

Für Wellenfronten gilt das Huygensche Prinzip. Man definiert $\Sigma_{q_0}(q)$ als die optische Bahnlänge zwischen Orten q_0 und q, also als minimale Ausbreitungszeit für Lichtstrahlen. Dann sind die Wellenfronten die Flächen konstanter $\Sigma = t$. Die Ausbreitung von Wellenfronten kann man mit Hilfe des Huygenschen Prinzips darstellen. Der Gradient der Funktion $\Sigma_{q_0}(q)$ ist zur Wellenfront orthogonal.



Jetzt betrachten wir analog mechanische Systeme. Hier entsprechen die Massenpunktbahnen die Lichtsstrahlen, und das Fermatsche Prinzip entspricht dem Hamiltonschen Prinzip. Als Wellenfronten werden die Flächen konstanter Wirkung dienen. Sei die Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig, so daß die Wirkungsfunktion als

$$S(q,P) = W(q,P) - Et$$

beschrieben werden kann. Die Flächen $S = const$ bewegen sich im Konfigurationsraum, sie schieben sich mit der Zeit t über die festliegenden Flächen $W = const$. Finden wir die Fortpflanzungseschwindigkeit der Front der Wirkungswelle. Die Änderung der Wirkungsfunktion lautet

$$dS = -Edt + \nabla W \cdot d\vec{r}$$

Aus der Bedingung $dS = 0$ (wir bleiben bei konstanter Wirkung) folgt

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|E|}{|\nabla W|}$$

Aber $\nabla W = \vec{p}$, so daß

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|E|}{|p|} = \frac{|E|}{\sqrt{2m(E-V)}}$$

Das bedeutet, daß der Vektor $\vec{p} = \nabla W$ umgekehrt proportional zur Frontgeschwindigkeit ist. Im Allgemeinen können $\vec{p}$ und $\dot{\vec{q}}$ verschiedene Richtungen haben, normalerweise aber sind die gleich.

Jetzt können wir den Zusammenhang zwischen geometrischer Optik und der Punktmechanik feststellen

Optik	Mechanik
Optisches Medium	Raum $\vec{q}$
Lichtstrahl	Bahn $\vec{q}(t)$
Fermatsches Prinzip	Hamiltonsches Prinzip
Optische Bahnlänge	Wirkungsfunktion
Huygensches Prinzip	Hamilton-Jacobi-Glh.
$(\nabla S)^2 = n^2$	$\frac{(\nabla W)^2}{2m} = E - V$
Brechungsindex n	$\sqrt{2m(E-V)}$
Fokus, Kaustikfläche	Singularitäten der H.-J.-Glh.
Wellenoptik (Interferenz, Diffraktion)	Quantenmechanik

Kapitel 5

Mechanik des starren Körpers

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten, deren Abstände konstant sind. Einfachkeitswegen betrachten wir einen starren Körper als eine diskrete Menge von Massenpunkten, eine Verallgemeinerung auf den Fall von kontinuierlicher Verteilung ist einfach. Ein starrer Körper kann sich bewegen und rotieren. Man kann sich überlegen, daß die Lage eines starren Körpers durch die Angabe seines Schwerpunkts (drei Koordinaten) und seiner Orientierung relativ zu den Achsen eines Inertialsystems (drei Winkel) festgelegt werden kann. Deshalb ist ein starrer Körper ein System mit 6 Freiheitsgraden.

Falls ein starrer Körper frei ist, d. h. es wirkt keine Kraft, bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig. Wenn wir ein Inertialsystem wählen, das sich mit dem Schwerpunkt bewegt, brauchen wir nur die Rotation zu beschreiben. Also bleiben nur drei Freiheitsgrade. In diesem Kapitel betrachten wir nur diesen Fall: in unserem Inertialsystem ist der Schwerpunkt genau der Ursprung.

Weil für einen freien Körper auch die Energie und die drei Komponenten des Drehimpulses erhalten sind, haben wir eine Bewegung nicht im 6-dimensionalen Phasenraum, sondern auf einer 2-dimensionalen Oberfläche. Wir werden sehen, daß diese Bewegung zwei Frequenzen hat.

Zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers führen wir ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem K' ein. Neben K' betrachten wir auch ein Inertialsystem K, in dem die newtonschen Gesetze gelten. Weil K' ein nichinertiales System ist, können wir hier die Beziehung zwischen Zeitableitungen verwenden:

$$(\frac{d\vec{A}}{dt})_K = (\frac{d\vec{A}}{dt})_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

wobei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der der Körper rotiert.

5.1 Trägheitstensor

Die Geschwindigkeit jedes Teilchens im Inertialsystem K kann man durch die Winkelgeschwindigkeit darstellen:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Berechnen wir jetzt den Drehimpuls eines Teilchens

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$$

Benutzen wir jetzt den Entwicklungssatz

$$[\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$$

und erhalten

$$\vec{L} = m(\vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega}))$$

Wir schreiben diese Gleichung in Komponenten

$$L_i = m(\omega_i r^2 - r_i r_l \omega_l) = \omega_l (m(r^2 \delta_{il} - r_i r_l))$$

Jetzt addieren wir die Drehimpulse von allen Teilchen und erhalten

$$L_i = \omega_l \sum_\alpha m_\alpha((r^\alpha)^2 \delta_{il} - r_i^\alpha r_l^\alpha)$$

Bezeichnen wir

$$I_{il} = \sum_\alpha m_\alpha((r^\alpha)^2 \delta_{il} - r_i^\alpha r_l^\alpha)$$

Diese zweifach indizierte Größe heißt Trägheitstensor. Der Drehimpuls hat also die Form

$$L_i = I_{il}\omega_l$$

In Matrixform geschrieben, lautet der Trägheitstensor

$$I_{il} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum mxy & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mxz & -\sum myz & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Betrachten wir jetzt die kinetische Energie.

$$T = \sum \frac{m}{2} v^2 = \sum \frac{m}{2} [\vec{\omega} \times \vec{r}]^2$$

Wir benutzen die Lagrangesche Identität

$$[\vec{A} \times \vec{B}]^2 = A^2 B^2 - (\vec{A}\vec{B})^2$$

und erhalten

$$T = \frac{1}{2} \sum m(\omega^2 r^2 - (\omega_i r_i)(\omega_l r_l)) = \frac{1}{2} \sum m(r^2 \omega_i \omega_l \delta_{il} - r_i r_l \omega_i \omega_l) = \frac{1}{2} \omega_i \omega_l I_{il}$$

Wir sehen, daß die kinetische Energie auch durch den Trägheitstensor dargestellt werden kann.

5.2 Tensoren

Wir haben verschiedene mathematische Begriffe: Skalar, Vektor, Matrix, Tensor. Was ist der Unterschied?

Man kann im Prinzip jede Anzahl von Variablen als einen Vektor schreiben. Z. B., die kanonischen Variablen q_1, p_1, q_2, p_2 kann man als einen 4-dimensionaler Vektor darstellen.

Es gibt aber Vektoren, die mit unserem 3-dimensionalen Raum verknüpft sind, und deren Komponenten von dem Koordinatensystem abhängig sind. Diese Vektoren sind z.B. die Geschwindigkeit und die Kraft.

Die Tensoren des dreidimensionalen Raums werden durch ihr Verhalten unter Transformationen des Koordinatensystems definiert.

Der Ortsvektor kann durch seine Komponenten dargestellt werden

$$\vec{r} = \sum x_k \vec{e}_k$$

(Früher haben wir $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ geschrieben). Betrachten wir jetzt eine Drehung des Koordinatensystems, die durch eine Matrix A gegeben wird:

$$x'_k = \sum \alpha_{ki} x_i$$

Die Matrix soll die Bedingung

$$\sum_k \alpha_{ki}\alpha_{kl} = \delta_{il}$$

erfüllen (orthogonale Transformation), dann bleibt die Vektorlänge bei der Drehung erhalten:

$$\sum_k x_k'^2 = \sum \alpha_{ki} x_i \sum \alpha_{kl} x_l = \sum \sum \alpha_{ki}\alpha_{kl} x_i x_l = \sum \delta_{il} x_i x_l = \sum x_i^2$$

Eine Größe, ohne Index, die sich bei orthogonalen Transformationen nicht ändert, heißt Skalar oder Tensor nullter Stufe.

Eine Größe A_i mit einem Index, die sich wie die Komponenten x_i des Ortsvektors transformiert

$$A'_i = \sum \alpha_{il} A_l$$

heißt Tensor 1. Stufe.

Eine Größe mit N Indizes heißt Tensor N-ter Stufe, wenn sie komponentenweise wie

$$A'_{ij...l} = \sum_{i'} \sum_{j'} ... \sum_{l'} \alpha_{ii'}\alpha_{jj'}...\alpha_{ll'} A_{i'j'...l'}$$

transformiert.

Wir zeigen jetzt, daß der Trägheitstensor ein Tensor 2. Stufe ist. Im neuem Koordinatensystem lautet der Trägheitstensor

$$I'_{kj} = \sum m(r^2\delta'_{kj} - x'_k x'_j)$$

Für beide Teile erhalten wir

$$\delta'_{kj} = \sum\sum \alpha_{ki}\alpha_{jl}\delta_{il} = \sum \alpha_{kl}\alpha_{jl} = \delta_{kj}$$

$$x'_k x'_j = \sum \alpha_{ki}x_i \sum \alpha_{jl}x_l = \sum\sum \alpha_{ki}\alpha_{jl}x_i x_l$$

Also wird der neue Trägheitstensor entsprechend allgemeinen Regeln transformiert.

5.3 Hauptachsentransformation

Wir haben bisher den Trägheitstensor in einem beliebigen körperfesten Koordinatensystem betrachtet. Wir können aber ein spezielles System wählen, um die Gestalt des Tensors zu vereinfachen. Die symmetrische Matrix I_{il} hat drei unabhängige Außerdiagonalelemente. Anderseits hat die orthogonale Matrix A drei Parameter (Drehwinkel). Das bedeutet, daß wir ein solches Koordinatensystem finden können, wo die Matrix I_{il} diagonal ist, hat also die Gestalt

$$I_{il} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum m(x^2+z^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Dieses System heißt Hauptachsensystem, und die Diagonalelemente heißen Hauptträgheitsmomente. In dem Hauptachsensystem sind die Ausdrücke für den Drehimpuls und die kinetische Energie einfach:

$$L_1 = I_1\omega_1, \qquad L_2 = I_2\omega_2, \qquad L_3 = I_3\omega_3$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

Ein starrer Körper heißt:
Kugelkreisel, wenn $I_1 = I_2 = I_3$
symmetrischer Kreisel, wenn $I_1 = I_2 \neq I_3$
unsymmetrisch, wenn alle Hauptträgheitsmomente verschieden sind
Rotator, wenn er eindimensional ist und $I_1 = I_2,\ I_3 = 0$.

Beispiel 5.1 *Quader*
Sei $\rho = m/(abc)$ die Massendichte des homogenen Quaders mit Seiten a, b, c. Dann

$$I_1 = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

und analog

$$I_2 = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \qquad I_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

5.4 Eulersche Gleichungen

In dem Inertialsystem gilt die Gleichung für den Drehimpuls:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

wobei $\vec{N}$ das Drehmoment ist. Im körperfesten System ist der Trägheitstensor diagonal, deshalb sind die Gleichungen in diesem System am einfachsten. Weil dieses System nicht-inertial ist, schreiben wir

$$(\frac{d\vec{L}}{dt})_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}$$

Betrachten wir einen starren Körper, auf den keine Drehmomente wirken, also $\vec{N} = 0$. Weil im Hauptachsensystem die einfache Beziehung zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit gilt, erhalten wir

$$\frac{dL_1}{dt} + (\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3})L_2L_3 = 0$$
$$\frac{dL_2}{dt} + (\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1})L_1L_3 = 0$$
$$\frac{dL_3}{dt} + (\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2})L_1L_2 = 0$$

Oder man kann die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit als Variablen betrachten:

$$\frac{d\omega_1}{dt} + (\frac{I_3 - I_2}{I_1})\omega_2\omega_3 = 0$$
$$\frac{d\omega_2}{dt} + (\frac{I_1 - I_3}{I_2})\omega_1\omega_3 = 0$$
$$\frac{d\omega_3}{dt} + (\frac{I_2 - I_1}{I_3})\omega_1\omega_2 = 0$$

Wir haben ein System von drei Differentialgleichungen und dieses System ist nicht linear. Um die Lösung zu finden, ist es immer behilflich, die Erhaltungsgrößen zu bestimmen. Wir multiplizieren die erste Glh. mit ω_1, die zweite mit ω_2 und die dritte mit ω_3. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega_1^2}{dt} + (\frac{I_3 - I_2}{I_1})\omega_1\omega_2\omega_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega_2^2}{dt} + (\frac{I_1 - I_3}{I_2})\omega_1\omega_2\omega_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega_3^2}{dt} + (\frac{I_2 - I_1}{I_3})\omega_1\omega_2\omega_3 = 0$$

Wenn wir jetzt die erste Glh. mit I_1 multiplizieren usw., dann bekommen wir

$$\frac{d}{dt}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = 0$$

Dies ist der Energiesatz. Wenn wir jetzt die erste Glh. mit I_1^2 multiplizieren usw., dann bekommen wir

$$\frac{d}{dt}(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2) = 0$$

Dies ist Erhaltung des Quadrats des Drehimpulses L^2. Schreiben wir diese Erhaltungssätze für die Komponenten des Drehimpulses:

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2$$

$$\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2T$$

Im dreidimensionalen Raum L_1, L_2, L_3 beschreiben diese Gleichungen eine Kugel und eine Ellipse. Um mögliche Bewegungsbahnen zu finden, brauchen wir nur die Kugel und die Ellipse zu schneiden. Es gibt drei Lösungen, wobei die Komponenten L_i konstant sind; die sind

$$L_1 \neq 0, L_2 = L_3 = 0, \quad L_2 \neq 0, L_1 = L_3 = 0, \quad L_3 \neq 0, L_2 = L_1 = 0$$

Diese Lösungen sind Rotationen um drei Hauptachsen. Die Rotationen um die kleinste oder die größte Achse sind stabil, und die Rotation um die mittlere Achse ist instabil.