Übungsblatt 6, Abgabe am 29.11.2006

6 Hopf-Bifurkation mittels AUTO (38 P)

Aufgabe 6.1 (10 Punkte)
Gegeben sei ein dissipatives System mit dem Lyapunov-Spektrum $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. j sei die größte Zahl für die $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0$ gilt. Dann ist die Kaplan-Yorke-Dimension wie folgt definiert:

$$d_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

a) Zeigen Sie, dass $j < n$ gilt.
b) Berechnen Sie d_L für einen Fixpunkt, Grenzzyklus und einen 2-Torus.
c) Zeigen Sie, dass für ein dreidimensionales chaotisches System

$$d_L = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}$$

gilt.
d) Beweisen Sie für den Fall eines dreidimensionalen chaotischen Systems, dass die Kaplan-Yorke-Dimension mit der Box-Dimension übereinstimmt. Tipp: Betrachten Sie einen Würfel mit der Kantenlänge ϵ. Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Volumens durch $V(t) = \epsilon^3 \exp((\lambda_1 + \lambda_3)t)$ gegeben ist. Die kleinste Kantenlänge ist $s(t) = \epsilon \exp(\lambda_3 t)$. Bestimmen Sie die Anzahl $N(t)$ der zur Überdeckung des Volumens $V(t)$ notwendigen Würfel mit dieser Kantenlänge. Berechnen Sie die Box-Dimension

$$d_{Box} = \lim_{t \to \infty} \frac{\log N(t)}{\log s^{-1}(t)}$$

Aufgabe 6.2 (22 Punkte)
Morris-Lecar-Modell: Arbeiten Sie sich in die Benutzung von AUTO zur Behandlung zwei-dimensionaler Systeme mit **Hopf-Bifurkation** ein. Nutzen Sie dazu den Abschnitt **IV. Two dimensional systems** bis einschließlich **Homework 2.3** des **Tutorials** unter http://www.math.pitt.edu/~bard/bardware/tut/xpptut3.html

a] Reproduzieren Sie die vier gezeigten Grafiken. Für jeden Plot gibt es 3 Punkte.

b] Lösen Sie die Hausaufgaben 2.1 (=2 Punkte), 2.2 (=6 Punkte) und 2.3 (=8 Punkte).

http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2006WS-NLD/nld06.html
jkurths@agnld.uni-potsdam.de oder shw@agnld.uni-potsdam.de