# Übungsblatt 13, Abgabe am 31.1.2007

# 13 Numerische Integration einer SDE & Bifurkation (18 Punkte)

**Aufgabe 13.1 (9 Punkte)**
Betrachten Sie den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\frac{dX}{dt} = -kX + \sigma_\xi \frac{dW}{dt}, \tag{1}$$

wobei $W$ einen Wiener-Prozess darstellt. $dW/dt = \xi(t)$ stellt Gauß-verteiltes

$$\xi(t) \sim WN(0,1)\,,$$

weißes Rauschen

$$< \xi(t)\xi(t') >= \delta(t-t')$$

mit der Standardabweichung $\sigma_\xi$ dar. Zur numerischen Integration der Gl. (1) benötigen Sie Realisierungen einer Gauß-verteilten Zufallsvariable $\xi(t)$. Benutzen Sie dazu das Box-Müller-Verfahren, das aus zwei gleichverteilten Zufallsvariablen zwei Gauß-verteilte erzeugt.

Verwenden Sie das Euler-Verfahren

$$X_{n+1} = X_n - k\, X_n\, \Delta t + \sigma_\xi\, \xi\, \sqrt{\Delta t}. \tag{2}$$

mit kleiner Schrittweite ($\Delta t$ =0.05) zur Darstellung von drei Trajektorien mit je 1000 Zeitschritten für $k = 1$ und $k = 5$. (Siehe Honerkamp, Stochastische dynamische Systeme).

Schätzen Sie simulativ, also unter Verwendung hinreichend langer Trajektorien, die stationären Verteilungen für $k = 1$ und $k = 5$.

Diskutieren Sie die Resultate im Zusammenhang mit der stationären Verteilung für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

**Aufgabe 13.2 (9 Punkte)**
Zebrastreifen und Schmetterlingsflügel gehöhren zu den beeindruckendsten Beispielen für biologische Musterbildung. Als Teil eines Modells für Musterbildung wurde von Lewis et al. (1977) eine Gleichung für einen biochemischen Schalter aufgestellt. Es wird beschrieben wie ein Gen $G$ von einer chemischen Signalsubstanz $S$ aktiviert werden kann. Das Gen kann zum Beispiel im normalen Zustand inaktiv sein und die Produktion von Pigmenten erlauben, wenn die Konzentration von $S$ eine bestimmte Schwelle überschreitet. Sei $g(t)$ die Konzentration vom Genprodukt und $s_0$ die konstante Konzentration von $S$. Das Modell lautet

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2}, \tag{3}$$

wobei die $k$'s positive Konstanten sind. Die Produktion von $g$ wird durch $s_0$ mit der Rate $k_1$ und durch einen autokatalytischen Prozess (positive Rückkopplung durch den

nichtlinearen Term) stimuliert. $g$ wird zusätzlich noch linear abgebaut.
a) Zeigen Sie, dass das System in die dimensionslose Form

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \tag{4}$$

gebracht werden kann, wobei $r$ und $s$ ebenfalls dimensionslos sind.
b) Zeigen Sie für $s = 0$, dass für $r < r_c$ zwei positive Fixpunkte existieren. Geben Sie den Ausdruck für $r_c$ an.
c) Nehmen Sie an, dass die Genproduktion zum Zeitpunkt $t = 0$ Null ist ($g(0) = 0$) und dass $s$ langsam, von Null ausgehend, steigt (das aktivierende Signal wird eingeschaltet). Was passiert mit $g(t)$? Was passiert, wenn $s$ wieder auf Null fällt? Wird das Gen ausgeschaltet?
d) Erstellen Sie für die Bifurkationskurven Gleichungen im Parameterraum $(r, s)$ und klassifizieren Sie die auftretenden Bifurkationen.

http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2006WS-NLD/nld06.html