Universität Potsdam, Institut für Physik SS 2005
Lineare und nichtlineare Methoden der Zeitreihenanalyse
Vorlesung am Freitag 11:00-12:30, Raum 1.19.415 J. Kurths
Übung in Raum 1.19.423 (Computerpool) U. Schwarz
Gruppe 1 am Dienstag 9:30-11:00 Gruppe 2 am Donnerstag 12:45-14:15

Aufgabenblatt 1, Abgabe 28.04.2005

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Binomial-Verteilung mit $n = 6$ und $P = 1/4$. Tabellieren Sie die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Werte, skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F, und berechnen Sie die Momente μ und σ^2 direkt aus den Wahrscheinlichkeiten. Stimmen die Ergebnisse mit den theoretischen Formeln $\mu = n\ P$ und $\sigma^2 = n\ P\ (1 - P)$ überein?
(2 P.)

Aufgabe 2: Die zweidimensionale Normal-Verteilung in (X, Y) hat die Dichtefunktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$$

mit den Parametern μ_X, μ_Y, σ_X, σ_Y und ρ. Berechnen Sie die Randdichten für X und Y – welcher Verteilung folgen sie? –, und zeigen Sie aufgrund dessen, dass $\rho = 0$ genau dann, wenn X und Y unabhängig sind.
(3 P.)

Aufgabe 3: **a**] Die empirische Varianz s^2 auf einer Stichprobe $\vec{x}$ vom Umfang n, betrachtet als Schätzfunktion $\psi(\vec{X})$ auf dem Zufallsvektor $\vec{X}$, ist gegeben durch

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{mit} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Stellen Sie $\bar{X}_n$ und $\hat{S}_n^2$ für ausgewählte Stichprobenumfänge gleichverteilten und gauß'schen Rauschens grafisch dar. Diskutieren Sie das Ergebnis. Fügen Sie dem Lösungsblatt die verwendeten kommentierten Quellcodes bei.
(4 P.)

b] Zeigen Sie, dass für eine beliebige Zufallsvariable X mit Varianz σ^2 gilt, dass

$$\langle \hat{S}_n^2 \rangle = \frac{n-1}{n}\ \sigma^2,$$

also dass $\hat{S}_n^2$ als Schätzer von σ^2 bloß asymptotisch erwartungstreu ist. Sie können versuchen, die Rechnung möglichst übersichtlich zu gestalten, indem Sie sich Rechenregeln für den Erwartungswert $\langle\ \rangle$ überlegen (linearer Operator). Diskutieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit Aufgabenteil a].
(2 P.)