Übungsblatt 13, Abgabe am 27.1.2005

13 Wiederholung (18 P)

Aufgabe 13.1 (9 Punkte)
Berechnen Sie das Lyapunov-Spektrum für die zwei entkoppelten Zelt-Abbildungen

$$x_{n+1} = A\min(x_n, 1 - x_n) \tag{1}$$
$$y_{n+1} = B\min(y_n, 1 - y_n) \tag{2}$$

Für welche A und B ist das System dissipativ? Stellen Sie den Parameterbereich $B(A)$ für den dissipativen Fall grafisch dar.
Stellen Sie die Cobwebs für die beiden Zustandsvariablen x_n und y_n für einen ausgewählten dissipativen Fall dar.
Kommentieren Sie die Dynamik der beiden Zustandsvariablen.

Aufgabe 13.2 (9 Punkte)
Bifurkationsanalyse: Skizzieren Sie die Lage aller Fixpunkte der Gleichung

$$\dot{x} = -x(x^2 + 2x - \mu)(x^2 + \mu^2 + 4\mu + 3)(x^2 + 4x + \mu^2 + 3)(x^2 - x + \mu^2 - 6\mu + \frac{33}{4})$$

in einem Bifurkationsdiagramm (einer Stabilitätskarte) $x(\mu)$. Untersuchen Sie die Stabilität der Fixpunkte. Geben Sie die auftretenden Bifurkationstypen an!

Aufgabe 13.3 (9* Punkte)
Stabilitätskarte der Fixpunkte des Brüsselators: Die Reaktionskinetik einer oszillierenden chemischen Reaktion lässt sich stark vereinfacht mit dem Brüsselator-Modell

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k_1} & X \\ B + X & \xrightarrow{k_2} & Y + C \\ 2X + Y & \xrightarrow{k_3} & 3X \\ X & \xrightarrow{k_4} & D \end{array}$$

beschreiben. Die großen Buchstaben stehen für die Konzentrationen chemischer Substanzen. X und Y bezeichnen Konzentrationen der beiden chemischen Komponenten, die sich im Laufe der Zeit ändern können. A und B beschreiben Konzentrationen zweier weiterer chemischer Substanzen, die als Kontrollparameter des Systems dienen. Die Konzentrationen C und D können als konstant betrachtet werden. Die k_i bezeichnen die Reaktionsgeschwindigkeiten.
Machen Sie sich die Gestalt der Bewegungsgleichungen [$\dot{X} = A - (B+1)X + X^2Y$ und $\dot{Y} = BX - X^2Y$] für die Konzentration der Spezies X und Y klar und charakterisieren Sie die Fixpunkte des Systems in Abhängigkeit von den Konzentrationen A und B für den Fall $k_i = 1$. Veranschaulichen Sie das Resultat mittels einer Stabilitätskarte $B(A)$.