9. Hamilton-Funktion und Hamilton-Gleichungen

1. (4 Punkte)
   Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse m am Fadenpendel der Länge l mit Auslenkwinke φ als generalisierte Koordinate.

   (a) Bestimmen Sie für das Fadenpendel die Hamliton-Funktion und stellen Sie die zugehörigen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

   (b) Lösen Sie die Gleichung für kleine Auslenkungen $\varphi << 1$.

2. (3 Punkte)
   Problem aus Aufgabenblatt 7. Die Position eines Teilchens werde durch Zylinderkoordinaten (r, φ, z) beschrieben. Die potenzielle Energie des Teilchens sei

   $$V(r, \varphi) = a \ln\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right) + b \sin(\varphi)$$

   Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion und stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

3. (5 Punkte)
   Ein Elektron der Masse m bewege sich entlang der x-Koordinate senkrecht zu den Platten eines Plattenkondensators, dessen Spannung linear mit der Zeit anwächst. Für das zeitabhängige Potential (potentielle Energie) soll gelten $V = -cxt$ mit $c = const$, d.h. die Lagrange-Funktion ist:

   $$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + cxt$$

   (a) Bestimmen Sie die Hamiton-Funktion und stellen Sie die kanonisch konjugierten Bewegungs-Gleichungen auf.

   (b) Lösen Sie diese für die Anfangbedingung $x(0) = 0$ und $p(0) = 0$.

   (c) Berechnen Sie mittels der Hamilton-Funktion die Energie des Elektrons als Funktion der Zeit.