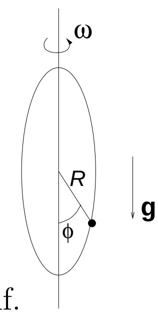
8. Lagrange-Gleichungen 2. Art u. Erhaltungsgrößen

Hinweis: In beiden Aufgaben kann man von Kugelkoordinaten (r, θ, φ) ausgehen und beachten, dass die in den Aufgaben als generalisierte Koordinate ϕ verwendete Größe sich durch $\phi = \pi - \theta$ ergibt.

1. (7 Punkte)
   Eine Perle der Masse m gleite reibungslos auf einem Drahtring vom Radius R. Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse parallel zur Gravitationskraft im Schwerefeld g wie in der Skizze. Den Koordinatenursprung lege man ins Kugelzentrum.



   (a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

   (b) Formulieren Sie die Lagrangesche Bewegungsgleichung für die generalisierte Koordinate ϕ.

   (c) Welche Erhaltungsgrößen gibt es?
   Hinweis: Wenn L nicht explizit von der Zeit abhängt, dann ist

$$I = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

   eine Erhaltungsgröße.

   (d) Integrieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Winkel $\phi << 1$.

2. (5 Punkte)
   Die Bewegung eines Teilchens soll an der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R gebunden sein und sich unter dem Einfluß des Schwerefeldes bewegen, wie z.B. ein dreidimensionales Kugelpendel dessen Aufhängepunkt im Koordinatenursprung fixiert ist. Als geeignete generalisierte Koordinaten erweisen sich die Winkel $q_1 = \phi$, als Winkel der Auslenkung (wie oben) und $q_2 = \varphi$) als azimuthaler Winkel.

   (a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

   (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

   (c) Geben Sie eventuell vorhandene zyklische Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen an.