# 5. Keplerproblem

1. (4 Punkte)
   Der Komet Halley mit der Masse $m$ umläuft die Sonne (Masse $M$) auf einer elliptischen Bahn. Im Perihel $r_p$ ist der Abstand zur Sonne minimal, im Aphel $r_a$ ist der Abstand maximal. Gegeben seien $r_p$, $r_a$, die Masse $M$ und der Wert der Gravitationskpnstanten $\gamma$.
   (*Erinnerung:* $U = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{\gamma m M}{r}$).

   (a) Berechnen Sie die Umlaufperiode des Kometen $T(r_p, r_a, \gamma, M)$.
   *Hinweis: Berechnung der Umlaufperiode aus dem 2. Keplerschen Gesetz und dem Flächeninhalt einer Ellipse.*

   (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Kometen im Perihel und im Aphel.
   *Hinweis: Energieerhaltung,* $E = -\frac{\alpha}{2a}$, *große Halbachse* $a = \frac{r_a + r_p}{2}$.

2. (4 Punkte)
   Ein Planet mit der Masse m bewegt sich um einen Stern (mit der Masse $M$) auf einer Kreisbahn. Durch eine Explosion wird die Sternmasse zu $M'$ reduziert.

   (a) Finden Sie die Exzentrizität der Planetenbahn nach der Explosion.
   *Hinweis: Man kann annehemen, dass der Drehimpuls des Planeten bei der Explosion erhalten bleibt. Benutzen Sie die Ellipsengleichung mit* $p = \frac{L^2}{\alpha m} = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$.

   (b) Wie groß muss die Restmasse $M'$ sein, dass der Planet aus seiner Umlaufbahn entflieht?

3. (4 Punkte)
   Der Runge-Lenz Vektor definiert durch

   $$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

   ist eine Erhaltungsgröße und zeigt vom Zentrum in Richtung des Perihels (siehe Vorlesung). Der Winkel $\varphi$ sei der Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{r}$. Zeigen Sie mit Hilfe von $\vec{A} \cdot \vec{r}$ mit $A = |\vec{A}|$ folgende Relation

   $$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} \left( 1 + \frac{A}{m\alpha} \cos\varphi \right)$$

   und bestimmen Sie daraus die Exzentrizität $\epsilon$ der Ellipse. *Hinweis: Benutzen Sie die zyklische Vertauschbarkeit des Spatprodukts* $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.