

Himmelsmechanik

Vorlesung im SoSe 99/'01/'07/'10/'13/'14/'16
WS '05-'06 Universität Potsdam

Prof. Dr. Frank Spahn

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Wiederholung/Grundlagen	8
2.1	Newton & Prinzipienmechanik	8
2.1.1	Newtonsche Gleichungen - N-Teilchen	8
2.1.2	Hamilton Prinzip:	11
2.2	Krummlinige Koordinaten & Mitbewegte Bezugssysteme	12
2.2.1	Kurzabriß ART/Relativistik/Metrik	14
2.2.2	Beschleunigte Bezugssysteme/Rotation	19
2.3	Koordinatentransformationen	21
3	Das Gravitationspotenzial	23
3.1	Skizze der Greenschen Lösung	25
3.1.1	Berechnung der Greenschen Funktion	26
3.1.2	Berechnung von Gravitationsfeldern von Masseverteilungen	27
4	Das Zwei-Körper-Problem	28
4.1	Ungestörtes ZKP	28
4.1.1	Lösung ZKP	29
4.1.2	Lösung der Kepler-Gleichung	37
4.1.3	Die dreidimensionalen Orbitalelemente	43
4.2	Gestörtes ZKP	45
4.2.1	Lagrange-Klammern	47
4.2.2	Störungsfunktion	47
4.2.3	Lagranges-Störungsgleichungen	48
4.2.4	Störungsgleichungen und Orbitvektoren	49
5	Das Drei-Körper-Problem	52
5.1	Eingeschränktes DKP	52
5.1.1	Lagrange-Punkte	57
5.1.2	Lineare Stabilität der Lagrange-Punkte	61
5.1.3	Nullgeschwindigkeitskurven	65
5.1.4	Nichtlineare Phänomene der DKP-Bewegung	66
5.2	Elliptisches DKP	67
6	Das Hill-Problem	70
6.1	Librationspunkte & Nullgeschwindigkeitskurven	72

Literatur

- J. M. A. Danby (1992): *Celestial Mechanics*, *Willman & Bell*, Richmond.
- V. Szebehely (1962): *Theory of orbits. The restricted problem of three bodies*, *Academic Press*, London.
- D. Brouwer & G. M. Clemens (1961): *Methods of celestial mechanics*, *Academic Press*, London.
- C. D. Murray & S. F. Dermott (1999): *Solar System Dynamics*, *Cambridge Univ. Press*.

1 Einführung

- **Klassische Himmelsmechanik:** Bestimmung der Bewegung der **Wandelsterne/Planeten** am Firmament. Seit Newton wurde dann im wesentlichen mit gravitativ-wechselwirkenden Punktmassen gerechnet. **Zeitraum:** Altertum - 19. Jh.!
- **Moderne Himmelsmechanik:** Erweiterung der Aufgaben der klassischen Himmelsmechanik um:
 - im Zentrum des Interesses stehen nicht nur Planeten, sondern **kosmische Objekte** schlechthin: stellare Systeme (Galaxien) & Galaxienhaufen, kosmischen Scheiben (Galaxien, Akkretationsscheiben um kompakte Objekte, präplanetare Scheiben, planetare Ringe etc.)
 - **Dynamische Evolution/Strukturbildungen** kosmischer Objekte; bei Berücksichtigung hoher Teilchenzahlen bzw. endlicher Ausdehnungen der Körper sowie weiterer Wechselwirkungen neben Gravitation (elektromagnetische Felder, Kollisionen etc.)
 - Verwendung moderner Methoden der **NGGW-Thermodynamik** sowie der **Relativitätstheorie** zur Beschreibung der Evolution kosmischer Objekte
 - Berechnung/**Navigation** der Bahnen künstlicher Satelliten, das betrifft insbesondere Tiefraumexperimente: *Pioneer*, *Voyager*, *Ulysses*, *Galileo*, *Cassini*
 - Wichtige Methode: **Numerische Simulationen**

Forscher	Lebensdaten	Entdeckungen
Aristoteles	384 - 322 v. Chr.	-Kugelgestalt der Erde
Aristarch	310 - 230 v. Chr.	-Ansatz eines heliozentrischen Weltbildes -Größe von Erde und Mond
Eratosthenes	284 - 192 v. Chr.	-Erdumfang
Hipparch	180 - 125 v. Chr.	- Entfernung Erde - Mond - Neigung der Ekliptik
Ptolemäus	87 - 165	-geozentrisches Weltbild
Kopernikus	1473 - 1543	-heliozentrisches Weltbild
Brahe	1546 - 1601	-Beobachtungen zur Prüfung des Kopernikanischen Weltbildes -“geoheliozentrisches“ Weltbild
Kepler	1571 - 1630	-3 Keplerische Gesetze
Galilei	1564 - 1642	-erstes optisches Teleskop -4 große Monde des Jupiter -Vorarbeiten zur Newtonschen Gravitationstheorie
Newton	1642 - 1727	-Gravitationsgesetz -Bewegungsgesetze -Infinitesimalrechnung
Halley	1656 - 1742	-Bahn des Kometen Halley
Titius Bode	1729 - 1796 1747 - 1826	-Titius-Bode-Reihe
Herschel	1738 - 1822	-Uranus (1781)
Piazzi Zach	1746 - 1826 1754 - 1832	-Ceres
Gauß	1777 - 1855	-Bahn von Ceres
Leverrier Adams	1811 - 1877 1819 - 1892	-„ inverse “ Störungstheorie zur Suche nach transuranischen Planeten
Galle	1812 - 1910	-Neptun
Poincaré	1854 - 1912	-Chaostheorie -Dreikörperproblem
Einstein	1879 - 1955	-Relativitätstheorie

Historischer Abriss

- **Babylonier (1500 - 500 v. Chr.):** langjährige Venusbeobachtungen; Kenntnis der Phasen dieses Planeten; scheinbare Bahnbewegungen der Planeten - deren Epizyklen - Vorhersage von Sonnenfinsternissen
- **Aristoteles (384 -322 v. Chr.):** Folgte die Kugelgestalt der Erde aus der Kreisform des Erdschattens bei Mondfinsternissen.
Theorie der vier Elemente: Erde, Luft, Feuer und Wasser. Jede davon besitze seine eigene „Gravitation“ (entsprechend seiner „Schwere“). Deshalb bewege sich unter irdischen Bedingungen alles linear und geradlinig - den vier Elementen adäquat. Alle himmlischen Bewegungen sind jedoch, gefunden durch Beobachtungen, gekrümmt. Daraus schlußfolgert Aristoteles die Existenz eines vierten Elements - dem Äther, der für eine nicht geradlinige, sprich nichtirdische Bewegung verantwortlich sei.
- **Aristarch (310 - 230 v. Chr.):** Erste - allerdings unakzeptierte - Ansätze eines heliozentrischen Weltbildes der Bewegung der Sonne, der Erde und der Planeten. Bestimmte geometrisch die Größe von Himmelskörpern - Erde, Mond (mit 50% Fehler) - sowie die Entfernung Erde - Mond (ebenfalls ca. Faktor 2)
- **Eratosthenes (284 - 192 v. Chr.):** siehe Aristarch: Messung des Erdumfangs
⇒ Methode: man nehme 2 Orte gleicher geographischer Länge aber unterschiedlicher Breite
⇒ man beobachte Unterschiede in der Winkelhöhe (Parallaxe) eines Himmelskörpers (im konkreten Fall: der Sonne)
⇒ die Parallaxe sowie der bekannte Abstand zwischen beiden Orten, deren Basis, ergibt Hinweise auf die Erdkrümmung.
- **Hipparch (180 - 125 v. Chr.):** Geometrische Studien. Bestimmung der Entfernung Erde - Mond mit relativ hoher Genauigkeit (34 statt 30 Erdradien) über die Mondparallaxe. Er fand die Schiefe der Ekliptik sowie ihre Präzession (genauer die der Erdachse); stellte den ersten größeren Sternkatalog zusammen.
- **Ptolemäus (87 - 165 v. Chr.):** Begründer des geozentrischen Weltbildes (Werk: *Almagest*; Erde im Zentrum der Bewegung der Himmelskörper), welches bis zu Keplers Zeiten Gültigkeit behielt. Die Bewegung der Fixsterne und der Sonne ist damit exzellent zu beschreiben - Probleme bereiten die Planeten.
Kunstgriff: Einführung der Epizyklen; das sind kleinere Kreise, deren Zentren sich wiederum auf exzentrischen Kreisen um die Erde bewegen.
Damit ließ sich recht genau die Bewegung der damals bekannten Planeten vorher-sagen.
- **Nicolaus Kopernikus (1473 - 1543):** Wegbereiter des heliozentrischen Weltbil-des (Werk: *De revolutionibus orbium coelestium libri VI*; Sonne im Zentrum der Planetenbewegung). Einfache Kreisbahnen der Planeten um die Sonne lösten elegant das Problem der scheinbar komplizierten Epizyklenbewegung, die einfach durch die Projektion der Bewegungen auf die Himmelsphäre entsteht.
- **Tycho Brahe (1546 - 1601):** Erste akkurate Beobachtungen (Genauigkeit liegt bei Bogenminuten) um zu prüfen, ob das Ptolemäische oder das Kopernikanische Weltbild richtig ist. Entwickelte das sogenannte „geoheliozentrische“ Weltbild, bei dem die Sonne um die Erde kreist, jedoch alle anderen Planeten die Sonne umrunden.

Begründer des ersten astronomischen Observatoriums. Unter anderem beobachtete er eine Supernova (1572) und einen Kometen, dessen Parallaxe er bestimmte und fand, daß dieser Himmelskörper wesentlich weiter entfernt ist als der Mond und daß Kometen keine atmosphärischen Erscheinungen sind.

- **Johannes Kepler (1571 - 1630):** Als Schüler Brahes formulierte er die drei berühmten Keplerschen Gesetze als Folge zahlreicher, für die damalige Zeit höchst präziser Beobachtungen, die auf dem Werk Brahes basieren. Unter anderem beobachtete er eine Nova (1604) und beschäftigte sich mit Optik.
- **Galileo Galilei (1564 - 1642):** Erfand das erste optische Teleskop mit dem er die vier nach ihm benannten großen Jupitermonde, als auch die längliche Gestalt des Saturn entdeckte. Letztere stellte sich später als Ring des Planeten heraus. Erkannte, daß die Schwingungsperiode eines Pendels gegebener Länge nicht von der Schwingungsamplitude abhängt und daß die Trajektorien geworfener Körper unter der Erdgravitation Parabeln sind
 ⇒ wichtige Hinweise für Newtons Theorie
- **Sir Isaac Newton (1642 - 1727):** Begründer des „Goldenen“ Zeitalters der modernen Himmelsmechanik mit der Entwicklung der nach ihm benannten Bewegungsgesetze und des Gravitationsgesetzes. Die fundamentale Bedeutung seiner Arbeiten ist bis heute ungebrochen - bis auf wenige Ausnahmen basieren auch die modernen Methoden der Himmelsmechanik auf seinen Theorien. Sein Hauptwerk ist in der „*Principa Mathematica*“ (1687) dargelegt. Erst Einsteins allgemeine Relativitätstheorie liefert genauere Ergebnisse, die allerdings nur nahe kompakter Objekte (Neutronensterne, weiße Zwerge, schwarze Löcher) relevant sind.
- **Edmund Halley (1656 - 1742):** Zeitgenosse und Freund Newtons. Berechnete erstmals systematisch Bahnelemente von Kometen auf der Grundlage der Theorie Newtons. Er sagte u.a. die Bahnperiode des nach ihm benannten Kometen voraus.
- **Johannes D. Titius (1729 - 1796); Johann E. Bode (1747 - 1826):** Fanden empirisches Gesetz der Abstände der Planeten von der Sonne;
 $r_n \approx 0.4 + 0.3 \cdot 2^n$, $n = -\infty, 0, 1, \dots$; die Titius-Bode-Reihe. Sie postulierten die Existenz von Körpern an der Stelle $n = 3$ wo, wie wir heute wissen, der Asteroidengürtel liegt.
- **Friedrich Wilhelm Herschel (1738 - 1822):** Entdeckte den Planeten *Uranus* (1781), der sich in das Titius-Bodesche Schema unter dem Index $n = 6$ einfügt.
- **Guiseppe Piazzi (1746 - 1826); Franz X. v. Zach (1754 - 1832):** Suche nach einem Planeten bei $n = 3$ der Titius-Bode-Reihe
 ⇒ Piazzi fand „vorläufig“ den Asteroiden *Ceres* (1800), der später (Silvesternacht 1801) nach theoretischen Bahnbestimmungen von Carl Friedrich Gauß (siehe unten) von Zach wiederentdeckt wurde.
- **Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855):** Mathematiker; berechnete mit der Methode der kleinsten Quadrate mögliche Bahnellipsen von *Ceres*, die mit den Beobachtungen von G. Piazzi verträglich waren.
 Hauptzweck dieser Übung: den Asteroiden *Ceres*, der sich für mehr als ein Jahr der Beobachtung „entzog“, wiederzuentdecken (siehe auch oben: Zach)

- **1802 - 1804:** Die Entdeckung weiterer Planetoiden: *Pallas, Juno, Vesta*; deren radialen Abstände von der Sonne alle zu $n = 3$ der Titius-Bode-Reihe passen. Daraus folgerte man, daß sie Bruchstücke eines großen Planeten zwischen Mars und Jupiter gewesen sein könnten. Diese Hypothese ist allerdings sehr umstritten; genauso kann es sein, daß die Gravitationswirkung des Riesenplaneten Jupiter die Akkretation eines weiteren Planeten an dieser Stelle verhindert.
- **Entdeckung Neptuns: Ausgangspunkt:** Die berechneten Bahnparameter der Uranus, die 1790 von Delambre (1749 - 1822) nach dem Vorbild der Bahnparameterbestimmung nach Gauß durchgeführt wurden, wichen mit der Zeit immer mehr von den beobachteten Örtern von Uranus ab. Neben anderen Ursachen wurde die Beschreibung der ständig anwachsenden Abweichungen durch die Gravitation eines transuranischen Planeten immer populärer \Leftrightarrow „inverse“ Störungstheorie zur Bestimmung der Bahn und Masse des unbekanntes Planeten.
- **Jean J. Leverrier (1811 - 1877); John C. Adams (1819 - 1892):** Sie widmeten sich der o.g. Aufgabe der „inversen“ Störungstheorie mit dem Erfolg, daß beide unabhängig recht ähnliche Bahnparameter eines hypothetischen transuranischen Planeten vorlegten, die leider lange Zeit von der Fachwelt ignoriert wurden.
- **Johann J. Galle (1812 - 1910):** Begann am 18. September 1846 mit der systematischen Suche nach dem unbekanntes Planeten, nachdem Leverrier ihm in einem Brief von seinen theoretischen Ergebnissen informierte. Galle entdeckte dann Neptun am 23. September 1846 in der von Leverrier und Adams angegebenen Gegend des Firmaments.
- **Henri Poincaré (1854 - 1912):** Zeigte anhand des Dreikörperproblems, daß die den Erfolgen der klassischen Himmelsmechanik geschuldete Vorstellung, alle Bewegungen im Kosmos seien beliebig genau bestimmbar, wenn man nur die Anfangsbedingungen genau genug kenne, nicht haltbar ist. Die Unvorhersagbarkeit ist in der Nichtlinearität und Komplexität himmelsmechanischer Vielkörperprobleme begründet.
- **Albert Einstein (1879 - 1955):** Entwickelte die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Vor allem letztere ist bedeutsam für die Himmelsmechanik (kompakte Objekte: Schwarze Löcher, Neutronensterne, weiße Zwerge \Leftrightarrow Schwarzschild- & Kerrmetrik, Friedmann-Universum
 \implies es existiert kein homogenes stabiles Weltall; Periheldrehung der Merkurbahn etc.)
 Seine weiteren wissenschaftlichen Großtaten: Photoeffekt; Theorie der Brownschen Bewegung

2 Wiederholung/Grundlagen

2.1 Newton & Prinzipienmechanik

Zunächst sollen die *Newton'schen Axiome* Erwähnung finden:

1. ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, verharrt in „Ruhe“ oder in geradlinig-gleichförmiger Bewegung: Impuls ist unverändert $0 = d(m\vec{v})/dt$ wobei m die Masse ist und die Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ die Zeitableitung des Ortes ist. Der Impuls ist mit $\vec{P} = m\vec{v}$ gegeben.
2. die Kraft \vec{F} , die auf einen Körper wirkt, äußert sich in seiner Impulsänderung:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d(m\dot{\vec{r}})}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a} \quad (1)$$

3. zu jeder Kraft existiert eine betraglich gleiche aber entgegengesetzte Kraft: *actio* = *reactio*:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (2)$$

Die Indizes stehen hier z.B. für 2 Massepunkte i und j , die irgendwie miteinander wechselwirken mögen!

Wechselwirkung setzt hier das Stichwort für die, in der Himmelsmechanik wesentliche Kraft, die Gravitationskraft

$$\vec{F}_{ij} = -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (3)$$

und deren Potenzial

$$\Phi(r_{ij}) = -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (4)$$

mit dem Abstandsvektor (Relativvektor) beider Körper $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ und dessen Betrag r_{ij} sowie der Gravitationskonstante γ (oft auch als G bezeichnet).

Die Berechnung der Potenziale $\Phi(\vec{r})$ von ausgedehnten *Masseverteilungen* $\varrho(\vec{r})$ im allgemeinrelativistischen- & Newton'schen Grenzfall – „*flacher*“ Raum und kleine Geschwindigkeiten $|v|/c \ll 1$ – behandeln wir in Abschnitt 3.

2.1.1 Newtonsche Gleichungen - N-Teilchen

Gegeben seien $i \in (1, N)$ Teilchen an denen äußere ($\vec{F}_i^{(a)}$) - sowie Wechselwirkungskräfte (\vec{F}_{ij}) angreifen können. Die N Körper seien durch $3N$ Ortskoordinaten q_ν und Impulskoordinaten p_ν vollständig charakterisiert.

Nach dem 2. Newtonschen Axiom lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j:j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (5)$$

Kurze Verabredung: Mit griechischen Indizes bezeichne ich immer einzelne Dimensionen, mit arabischen - die Vektoren des Teilchens i z.B.: $\vec{r}_i(q_\alpha, \dots) = \vec{r}_i(q_{3(i-1)+1}, \dots, q_{3(i-1)+3})$. Koordinaten, Metrik und deren Transformationen folgen im Abschnitt 2.2.

Impuls- & Drehimpulserhaltung

Daraus lassen sich sofort Impuls- und Drehimpulserhaltung ableiten, indem man sich des III. Newtonschen Axioms

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (6)$$

erinnert und über den Ausdruck (71) summiert

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} + \underbrace{\sum_{ij:j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{\equiv 0} \quad (7)$$

wobei das Verschwinden des letzten Terms wegen (6) sofort klar ist. Damit kann man umformen

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right] = \dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} = \vec{F}_A \quad (8)$$

womit sofort klar wird, dass die Änderung des Gesamtimpulses $\vec{P} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i$ von der Summe der äußeren Kräfte $\vec{F}_A = \sum \vec{F}_i^{(a)}$ bestimmt ist. Bei Verschwinden der letzteren gilt die Impulserhaltung

$$\dot{\vec{P}} = 0 \quad \text{und mithin} \quad \vec{P} = \text{konstant} \quad (9)$$

Eine weitere Erhaltungsgröße ist mit dem zSchwerpunkt definiert

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (10)$$

und die Schwerpunkt-(Impuls)erhaltung in der Gestalt

$$M \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}_A \quad (11)$$

geschrieben werden kann. **Schwerpunktsatz:** *Danach bewegt sich der Schwerpunkt wie eine Punktmasse, in der die gesamte Masse $M = \sum m_i$ des Systems konzentriert ist.*

Bei Fehlen äußerer Kräfte äußert sich die Impulserhaltung in einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung.

Für die Drehimpulserhaltung multiplizieren wir die Gl. (71) vektoriell mit $\vec{r}_i \times$ und summieren wieder über alle Punktmassen i und erhalten:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right] = \dot{\vec{L}} = \vec{M} + \underbrace{\sum_{ij:j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}}_{\equiv 0} \quad (12)$$

so dass letztlich die Änderung des Gesamtdrehimpulses $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ vom resultierenden äußeren Drehmoment $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)}$, verursacht durch die äußeren Kräfte, bestimmt ist.

Fehlen äußere Kräfte, dann konstatieren wir Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

$$\dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{und damit} \quad \vec{L} = \text{konstant} \quad . \quad (13)$$

Bislang haben wir 9-Bewegungsintegrale für abgeschlossene Systeme: *Schwerpunkt & Impuls* \Rightarrow 6; *Drehimpuls* \Rightarrow 3.

Sind die Kräfte konservativ: $\vec{F}_i(\vec{r}_i) = -\nabla_i\Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ mit dem Potenzial Φ , dann ist auch die Energie erhalten, womit dann 10 Integrale existieren. Potenziale können, wenn z.B. die inneren Kräfte zentral sind: $\vec{F}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, auch für die inneren Wechselwirkungskräfte formuliert werden

$$\Phi_i = \Phi_i^{(a)} + \sum_{j \neq i} \Phi_{ij} \quad , \quad (14)$$

so dass das Gesamtpotenzial, also die gesamte potenzielle Energie geschrieben werden kann als

$$\Phi = \sum_i \Phi_i^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_{ij; j \neq i} \Phi_{ij} = \Phi^{(a)} + \Phi^{(i)} \quad . \quad (15)$$

Für die Wechselwirkungskräfte müssen wir noch ausführen – z.B. für die in der Himmelsmechanik wesentliche Gravitationskraft – dass sie folgender Eigenschaft genügen müssen:

$$\vec{F}_{ij} = |\vec{F}_{ij}(|\vec{r}|)| \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} \quad . \quad (16)$$

Die Zerlegung in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten wird in Zukunft bei der Reduktion des Systems noch sehr von Vorteil sein.

Dass der Ansatz (15) korrekt ist, zeigt die Differenziation, d.h. die Berechnung der daraus resultierenden Kräfte (wobei wir hier nur den Wechselwirkungsanteil betrachten, der äußere ist trivial):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} \Phi^{(i)} &= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} \frac{1}{2} \sum_{ij; j \neq i} \Phi_{ij} = -\frac{1}{2} \left[\sum_j \frac{\partial \Phi_{kj}}{\partial \vec{r}_k} + \sum_i \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial \vec{r}_k} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \vec{r}_k} + \frac{\partial \Phi_{lk}}{\partial \vec{r}_k} \right) = -\sum_l \frac{\partial \Phi_{lk}}{\partial \vec{r}_k} \quad . \quad (17) \end{aligned}$$

Die Umformungen nutzen aus, dass $\Phi_{lk} = \Phi_{kl}$ gilt, weil die Potenziale ja nur von den Abstandsbeträgen abhängen. Die rechte Seite bedeutet nichts anderes als die Summe der Kräfte die auf die Punktmasse m_k durch alle anderen m_l ausgeübt werden, wie es auch sein muss. Das Newtonsche Prinzip *actio = reactio* gewinnt man auch sofort, wenn man bedenkt, dass $\vec{r}_i - \vec{r}_j = -(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ gilt und das bei der inneren Ableitung von $\Phi_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ einen Vorzeichenwechsel mit sich bringt, wenn man die Indizes vertauscht.

Um die Energieerhaltung bei konservativen Kräften zu zeigen, multiplizieren wir skalar mit $\dot{\vec{r}}_i$ in Gleichung (71) ein – *Leistungssatz*, summieren und erhalten:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2}_{\equiv T} \right\} = -\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \Phi = -\frac{d}{dt} \Phi \quad (18)$$

$$\mathcal{T} + \Phi = E \quad , \quad (19)$$

wobei E die Gesamtenergie des Systems ist. Damit ergeben sich 10 Bewegungsintegrale für die Dynamik abgeschlossener (himmelsmechanischer) Systeme.

2.1.2 Hamilton Prinzip:

Zur Wiederholung sei auch noch das Hamilton Prinzip - das Prinzip der kleinsten Wirkung - angedeutet. Vielleicht könnte man es so lax formulieren, dass sich „die Dynamik immer den Weg des geringsten Widerstands“ im Konfigurations- bzw. Phasenraum wählt. Genau wie die Newton'schen Axiome handelt es sich beim *Hamilton Prinzip* um einen Erfahrungsansatz, der im Übrigen aus dem D'Lambert Prinzip (Zwangskräfte stehen immer senkrecht auf der Bewegung - verrichten somit keine Arbeit) abgeleitet werden kann.

Die Definition der Lagrange-Funktion ist die Differenz aus kinetische - \mathcal{T} und potentieller Energie Φ :

$$\tilde{L}(q_\nu, \dot{q}_\nu, t) = \mathcal{T}(\dot{q}_\nu) - \Phi(q_\nu) \quad , \quad (20)$$

wobei die Wirkung mit

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \tilde{L}(q_\nu, \dot{q}_\nu, t) \quad (21)$$

gegeben sei.

Mit diesen Definitionen lautet das Hamilton-Prinzip

$$\delta S = 0 \quad , \quad (22)$$

unter Beachtung dass nur die Koordinaten q_ν variiert werden und dass diese Variationen an den Endpunkten des Zeitintervalls verschwinden sollen, also: $\delta q_\nu(t_0) = \delta q_\nu(t_1) = 0$. Führt man die Variation aus, integriert einmal partiell erhält man die Lagrange-Gleichung II. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\nu} = 0 \quad . \quad (23)$$

Schließlich seien in diesem Rahmen noch die Hamiltonschen Gleichungen erwähnt, deren Konzept für die Störungsrechnungen im Verlaufe der Vorlesungen wichtig werden. Mit der Legendre-Transformation

$$H(p_\nu, q_\nu, t) = \sum_\nu p_\nu \dot{q}_\nu - \tilde{L}(q_\nu, \dot{q}_\nu, t) \quad , \quad (24)$$

wobei die kanonischen Impulse als $p_\nu = \partial L / \partial \dot{q}_\nu$ definiert sind, gewinnt man durch Bildung des totalen Differenzials unter Verwendung von Gl. (23) und mittels Koeffizientenvergleich die Krone der theoretischen Mechanik – die Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \quad \text{und} \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \quad . \quad (25)$$

2.2 Krummlinige Koordinaten & Mitbewegte Bezugssysteme

Im Allgemeinen kann man im N -dimensionalen Raum die Abhängigkeiten kartesischer Koordinaten x_i von Parametern q_j wie folgt darstellen:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (26)$$

$$\text{mit } D=3 \implies x = x(q_1, \dots, q_3)$$

$$y = y(q_1, \dots, q_3)$$

$$z = z(q_1, \dots, q_3)$$

Wir bleiben zunächst im Konfigurationsraum $D = 3$ in dem der Ortsvektor als

$$\vec{r} = x_i(q_1, \dots, q_3) \vec{e}_i \quad (27)$$

als Einsteinscher Summe geschrieben werden kann. Die Richtungsableitungsvektoren bei Änderung eines Parameters q_j lauten

$$g_j \vec{e}_{q_j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad (28)$$

mit dem Skalenfaktor

$$g_j = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right| = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2} . \quad (29)$$

Der entsprechende Einheitsvektor in die „Richtung“ q_j ist dann gegeben mit

$$\vec{e}_{q_j} = \frac{1}{g_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} . \quad (30)$$

Mit Kenntnis dieser Vektoren kann man nun Flächen- und Volumenelemente formulieren. Z.B. lauten Flächenelemente über das Vektorprodukt:

$$dA_k \vec{e}_{q_k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j = g_i g_j dq_i dq_j \vec{e}_{q_k} \quad (31)$$

und das Volumenelement ist mit dem Spatprodukt gegeben:

$$dV = d^3 \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right\} dq_i dq_j dq_k = g_i g_j g_k dq_i dq_j dq_k . \quad (32)$$

Als einfachstes Beispiel seien hier die Zylinderkoordinaten angeführt, deren Parameterdarstellung lauten:

$$x = \rho \sin \varphi$$

$$y = \rho \cos \varphi$$

$$z = z$$

womit sich der Radiusvektor zu:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y) + z\vec{e}_z \\ &= \rho\vec{e}_r + z\vec{e}_z\end{aligned}\quad (33)$$

ergibt. Mit dieser Definition erhält man die Skalenfaktoren und die korrespondierenden Einheitsvektoren:

$$g_\rho = 1 \quad ; \quad g_\varphi = \rho \quad ; \quad g_z = 1 \quad (34)$$

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y \quad ; \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y \quad ; \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad . \quad (35)$$

Es ist hilfreich zu wissen, dass sich in diesem (wie auch in vielen anderen krummlinigen Koordinaten) Fall einige Einheitsvektoren durch Differenziation nach einem Parameter ineinander umrechnen lassen: hier ist es

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} \quad ; \quad \vec{e}_\rho = -\frac{\partial^2\vec{e}_\rho}{\partial\varphi^2} = -\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} \quad . \quad (36)$$

Nun kann man auch Flächen- u. Volumenelemente formulieren:

$$dA_\rho = \rho\,d\varphi\,dz \quad (37)$$

$$dA_z = \rho\,d\varphi\,d\rho \quad (38)$$

$$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \quad . \quad (39)$$

Die Trägheitskräfte $\propto m\ddot{\vec{r}}$ (im folgenden betrachten wir nur 1 Massepunkt) und das Newtonsche Prinzip kann man nun sofort durch Differenziation formulieren:

$$m\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z = \vec{F} \quad . \quad (40)$$

Der erste Term auf der rechten Seite enthält Trägheits- und Zentrifugalkräfte, der mittlere Term ist Ausdruck der Drehimpulserhaltung ($|\vec{L}| = \rho^2\dot{\varphi}$) im Fall von Zentralkräften – läßt man die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ außer Acht, verbleibt die Korioliskraft $F_K = 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$.

Nun betrachten wir das für die Himmelsmechanik wesentliche Zentralkraftpotenzial

$$\Phi(\rho) = -\frac{\mu}{\rho} \quad (41)$$

in Polarkoordinaten ($z = 0$) und wenden darauf eines der Methoden der Prinzipienmechanik – Lagrange-Gleichung 2. Art bzw. Hamilton-Prinzip – an. Als **Übung** werden für gleiches Problem alle anderen Methoden, Hamiltonian, Hamiltonsche Gleichungen und Gleichungen nach Newton 2 angewendet.

Zunächst wird die Lagrange-Funktion $\tilde{L}(q_\nu, \dot{q}_\nu)$ mit Hilfe der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ aufgestellt (wir betrachten hier nur das ebene Problem):

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{\mu}{\rho} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\mu}{\rho} \quad (42)$$

so dass man mit der Lagrange-Gleichung die einzelnen Komponenten der Bewegungsgleichungen bestimmen kann. So lautet die ρ -Komponente der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{m}{2} \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{\rho} \right) = 0 \quad (43)$$

womit man sofort erhält

$$m [\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2] = -\frac{\mu}{\rho^2} . \quad (44)$$

Die φ -Komponente wird damit

$$m \frac{d}{dt} [\rho^2 \dot{\varphi}] = \frac{d}{dt} L = 0 \quad (45)$$

Ausdruck der Drehimpulserhaltung $L = \rho^2 \dot{\varphi} = \text{konstant}$. Diese Terme sind auch schon in der Newtonschen Gleichung (40) sichtbar, wenn man für die Zentralkraft $\vec{F} = -(\mu/\rho^2)\vec{e}_\rho$ wählt.

2.2.1 Kurzabriß ART/Relativistik/Metrik

Um gleich den Weg zu ebnen für eventuelle Abstecker in die *allg.* Relativitätstheorie – Himmelsmechanik für „Privilegierte“ – definieren wir zunächst Abstände (noch 3D)

$$d\vec{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (46)$$

$$d\vec{r}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (47)$$

$$d\vec{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (48)$$

zunächst für kartesische -, Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Die *metrische Fundamentalform* kann wie folgt aufgeschrieben werden (*Einstein Summen* in diesem Kapitel)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\nu) dx^\alpha dx^\beta \quad (49)$$

mit der für die allgemeine Relativitätstheorie grundlegenden Größe – der *Metrik* oder auch dem symmetrischen *metrischen Tensor* $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Der Name deutet schon darauf, dass man damit grundlegende Abstände und Winkel messen kann. Hat der Tensor nur diagonale Komponenten $g_{\alpha\beta} \propto \delta_{\alpha\beta}$ nennt man die Metrik orthogonal. So die Determinante nicht verschwindet, existiert mit $g^{\mu\nu}$ ein inverser Tensor, d.h. es gilt $g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = g_\alpha^\nu = \delta_\alpha^\nu \Rightarrow$ Einheitsmatrix bzw. Einheitstensor (δ - Kronecker Symbol). Für die obigen Ausdrcke (46)-(48) im Ortsraum (3D) liefert die Verjüngung des Tensors/Spur $g_\alpha^\nu \rightarrow g^a_a = 3$; für die vierdimensionale Raumzeit ergibt sich $g^a_a = 4$ (siehe unten).

Der metrische Tensor $g_{\alpha\beta}$, die *Metrik*, wird – erweitert um die 4. Dimension ct im *Riemann'schen Raum* – die entscheidende Größe bei der *Allgemeinen Relativitätstheorie*, der *Einsteinschen Gravitationstheorie* spielen. Bevor wir uns der Physik zuwenden, möchte ich einige Bemerkungen zum Rechnen mit Vierervektoren machen.

Die quadratische Form (49) im 4-dimensionalen Riemann'schen Raum enthält die Zeitkomponente cdt , so dass für den „einfachen“ des flachen (Minkowski) Raums wird

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 . \quad (50)$$

Die flache Metrik $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$ lautet in Matrix-Form

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

im Allgemeinen gilt Gl. (49), wobei der Index 4 die zusätzlichen zeitlichen Komponenten bezeichnet.

In Gl. (51) fällt auf, dass die zeitliche Komponente hier ein negatives Vorzeichen¹ zeigt. Hier wollen wir nur einige Rechenregeln für Vierervektoren andeuten. Es seien $\vec{A}^{(4)} = A_i$ und $\vec{B}^{(4)} = B_i$ Vierervektoren — z.B. Ortsvektor $x_i = (\vec{r}, -ct)$, Vierergeschwindigkeit $u_i = dx_i/d\tau = \gamma(\vec{v}, -c)$, bzw. $x^i = (\vec{r}, ct)$ und $u^i = dx^i/d\tau = \gamma(\vec{v}, c)$ mit Eigenzeit-Differenzial $d\tau = dt'/\gamma$ und $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — wobei hier schon die

$$\text{kovarianten } A_i = (\vec{A}, -A_4) \quad (52)$$

und

$$\text{kontravarianten } A^i = (\vec{A}, A_4) \quad (53)$$

Darstellungen angegeben sind. Mit beiden werden Beträge $A^2 = A_i A^i$ (Einstein-Summen) und Skalarprodukte gebildet $\vec{A}^{(4)} \cdot \vec{B}^{(4)} = A_j B^j$ oder Tensoren verjüngt $T_{\alpha\beta}^{\alpha\alpha} = T_{\beta}^{\alpha}$.

Mittels der Metrik $g_{\alpha\beta}$ kann man kovariante und kontravariante Darstellungen von Tensoren, Vektoren ineinander überführen: $A_i = g_{i\alpha} A^\alpha$; bzw. $A^k = g^{kj} A_j$ und Tensoren z.B. $T_i^j = g_{il} T^{lj}$. Bei Hebungen bzw. Senkungen von Indizes ist zu beachten, dass ein Vorzeichenwechsel beim zeitlichen Index (4) stattfindet (bei anderen alternativen Darstellungen/Konventionen betrifft das die räumlichen Komponenten, Indizes 1, 2, 3). Daraus folgt sofort, dass die Verjüngung (Spur) des (orthogonalen) metrischen Tensors $g_{\alpha\beta} \Rightarrow g_a^a = 4$ ist.

Zurück zur Gravitationstheorie: Die Masseverteilungen werden die Krümmungen des Raumes und auch die Bewegungen der Massenpunkte determinieren. In der Nichtrelativistischen Theorie halten wir an der Unveränderbarkeit der *Raum-Zeit* fest – und eingezwängt in dieses „Korsett“ bemühen wir die *Poisson-Gleichung* für das Gravitationspotenzial $\Phi(\vec{r})$, welches ebenfalls durch die Massenverteilung bestimmt ist, und dessen Gradienten $-\nabla\Phi$ dann in die Bewegungsgleichungen eingehen. Die *Allgemeine Relativitätstheorie* reduziert dieses Problem der Bewegung im Gravitationsfeldern auf eine reine geometrische Aufgabe. Dazu am Ende des Kapitels mehr.

Hier wollen wir zunächst nochmal auf die *Lagrange-Gleichung II.* in der Metrik-Formulierung (zunächst im Ortsraum) kommen – mit dem Ergebnis, dass wir sehen werden: Massenpunkte bewegen sich auf *Geodäten* – kürzesten Strecken in der Raum-Zeit bei gegebener Metrik (i.d. 4D Raumzeit). Mit der Definition des infinitesimalen Abstandsquadrats können wir sofort einen Zusammenhang zur Dynamik und Mechanik herstellen:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (54)$$

und so die Lagrange-Fkt. für zunächst ein freies Teilchen aufschreiben:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (55)$$

¹es gibt Darstellungen, mit Vorzeichenwechsel in den räumlichen Komponenten

womit wir in die Lagrange-Gl. II gehen. Wir verabreden folgende Schreibweise für die partielle Ableitung² einer Funktion

$$\frac{\partial F}{\partial x^\nu} = F_{,\nu}$$

womit wir unter Beachtung der Einsteinsummen und Produktregel erhalten:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\nu} = \underbrace{m g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha}_{\text{Summe+Produktregel}} ; \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\nu} = \tilde{L}_{,\nu} = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta . \quad (56)$$

Das frisch eingesetzt in Lagrange II und auch Kettenregel beachtet (ACHTUNG: Abhängigkeit: $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$) erhält man

$$g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\alpha + g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 .$$

Kettenregel beachten, Abhängigkeiten bei den Ableitungen etc. Nun nutzen wir die Identität aus (!Einstein Summen!):

$$g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = g_{\beta\nu,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

so dass man schreiben darf

$$g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{1}{2} \{ g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + g_{\beta\nu,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \}$$

und man erhält schließlich die Bewegungsgleichung eines Massepunktes – hier noch im Ortsraum,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 , \quad (57)$$

mit den *Christoffel*-Symbolen

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) . \quad (58)$$

Zu gleichen Schlussfolgerungen gelangt man in der 4D-Raum-Zeit, wenn man fordert, dass sich Massepunkte auf *Geodäten* in der 4D-Raum-Zeit bewegen müssen

$$S = \int_a^b ds = \text{Minimum} , \quad (59)$$

wobei man unter Beachtung von Gl. (50) und Multiplikation mit der (quasi-klassischen) Konstanten mc erhält

$$mc ds = \left\{ -mc^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\} dt \quad (60)$$

womit man den Ausdruck in der geschweiften Klammer als Lagrange-Funktion \tilde{L} identifiziert (im Fall $|v/c| \ll 1$ ergibt die 1. Ordnung der Taylor-Entwicklung den bekannten Newton'schen Ausdruck - abgesehen von der Ruheenergie mc^2).

²Auf weitere Rechenregeln wie partielle- und kovariante Ableitungen verweisen wir auf tiefer gehende Literatur

Die Variationsaufgabe auf eine der Gl. (57) äquivalente Form führt

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (61)$$

wobei λ ein freier Kurvenparameter ist, der für freie Teilchen proportional der Zeit τ aber auch der Wegstrecke s ist (oft findet man statt $d\lambda$ auch $d\tau$ oder ds). Mit den Gln. (57) & (61) haben wir Geodäten als Bahnkurven gefunden, die auch noch bei Anwesenheit von Massen/Gravitation die Trajektorien darstellen - da die Massen (Energie) Verteilung $\rho(\vec{r})$ die Quellen für Modifikationen (Krümmungen) der Metrik $g_{\alpha\beta}$ darstellen.

Einen ersten Vorgeschmack auf den Einfluss der Gravitation kann man anhand der Gleichungen (60)-(61) aufzeigen. Dazu erweitern wir die genäherte Lagrange-Funktion (Taylor-Entwicklung der geschweiften Klammer in Gl. (60)) wie folgt:

$$\tilde{L} \approx -mc \left[-c + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c} - \frac{\Phi}{c} \right] \quad (62)$$

um das Newton'sche Potenzial, so das wir für die infinitesimale Viererwegstrecke auch schreiben können

$$ds = \left(-c + \frac{1}{c} \frac{v^2}{2} - \frac{\phi}{c} \right) dt \quad . \quad (63)$$

Quadrieren wir diesen Ausdruck, gewinnen wir

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left\{ -c^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2\Phi + O(c^{-2}) \right\} dt^2 \\ &= dr^2 - \left[1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right] c^2 dt^2 \quad , \end{aligned} \quad (64)$$

wobei wir Terme der Ordnung $O(c^n)$, $\forall n \geq 2$ vernachlässigt haben. Somit können wir festhalten, dass wir in der linearen Näherung - d.h. geringe Gravitation und daraus folgende geringe Abweichungen von der flachen Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ - schreiben können:

$$g_{44} = - \left\{ 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right\} \quad . \quad (65)$$

Als nächstes werden wir die wichtigsten Annahmen, die zur Entwicklung der Einstein-Gleichung der *Allgemeinen Relativitätstheorie/Gravitationstheorie* führten, skizzieren:

1. *Allgemeines Relativitätsprinzip*: \Rightarrow alle Bezugssysteme (nicht nur geradlinig gleichförmig bewegte wie bei der *Speziellen RT*) sind physikalisch gleichberechtigt - man kann es auch kurz umreißen mit der Kurzformel: *Schwere Masse = Träge Masse*.
2. Die Quellen der gravitativen Wirkungen ist die *Verteilung der Masse/Energie* \Rightarrow charakterisiert durch den *Energie-Impuls Tensor* $\hat{T}(\rho)$
3. Die Quellen bewirken eine Krümmung der Raum-Zeit, d.h. Modifikation der Metrik $g_{\alpha\beta}$. Das *allgemeine Relativitätsprinzip* (siehe Punkt 1.) gebietet, dass die Gleichungen der *Allgemeinen Relativitätstheorie* Tensorgleichungen (2.ter Stufe in der Raum-Zeit) sein müssen. Wie alle Feldgleichungen in der Physik sollten es partielle Differentialgleichungen bis maximalen Ableitungen 2. Ordnung sein.

4. Bei genügend schwachen Gravitationsfeldern (dazu zählen die von Planeten, „normalen“ Sternen)³ sollen die allgemeinen Feldgleichungen in die Newton'sche Poisson-Gleichung übergehen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{r}^2} = 4\pi\gamma\rho(\vec{r}) \ .$$

Mit diesen physikalischen Requisiten können wir nun die Einstein'schen Gleichungen formulieren

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = C_E T_{\alpha\beta} \quad (66)$$

wobei der Ricci-Tensor durch Verjüngung $R^a_{\alpha\beta}$ (Spurbildung) des Krümmungstensors

$$R^a_{\alpha\beta} = \Gamma^a_{\alpha\beta,b} - \Gamma^a_{\alpha b,\beta} + \Gamma^a_{mb}\Gamma^m_{\alpha\beta} - \Gamma^a_{m\beta}\Gamma^m_{\alpha b} \quad (67)$$

entsteht – die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} sind mit Gl. (58) definiert.

Der Tensor $R_{\alpha\beta}$ charakterisiert die Krümmung der Raum-Zeit, ist *nichtlinear* in der Metrik g_{ij} und enthält deren 2. Ableitungen, wie oben gefordert. Seitens der Differentialgeometrie wäre noch viel mehr über dessen Eigenschaften zu sagen – vor allem die Gleichungen für konkrete Probleme formulieren bzw. lösen möchte. Für unsere knappe Skizze der Physik der *Allgemeinen Relativitätstheorie* soll das Obige zunächst genügen.

Newton'scher Grenzfall

Hier ist das Ziel, die 1. Näherung der Metrik $g_{\alpha\beta}$ als Abweichung vom flachen Raum $\eta : \alpha\beta$, verursacht durch ein schwaches Gravitationsfeld, über den Ansatz

$$g_{mn} = \eta_{mn} + \delta_{mn} \quad (68)$$

zu formulieren. Bei Abwesenheit von e.-m. Feldern und gegebener Masseverteilung $\rho(\vec{r})$ und bei nicht-relativistischen Geschwindigkeiten $|v/c| \ll 1$ enthält der Energie-Impuls Tensor – in den sonst neben der Energie-Massen-Dichte auch noch die Flüsse von Energie (z. B. Poynting-Vektor \vec{S}) u. Impuls (Spannungstensoren $\hat{\sigma}$) eingehen – in dem Fall nur

$$T_{44} = c^2\rho(\vec{r})$$

(die restlichen Flußkomponenten sind von der Ordnung v/c und damit vernachlässigbar).

Unter Beachtung dieser Annahmen bilden wir die Spur der Gl. (66) – zur Vereinfachung der Feldgleichungen – und erhalten zunächst für den Krümmungsskalar

$$-R = C_E T^a_a = C_E T = C_E c^2\rho(\vec{r}) \quad (69)$$

und den ersetzt in Gl. (66) gibt

$$R_{mn} = C_E \left(T_{mn} - \frac{1}{2}\eta_{mn}T \right) \ . \quad (70)$$

³Allgemein-relativistische Effekte kommen nur bei kompakten Objekten – schwarze Löcher, Neutronensternen, weiße Zwerge – zum tragen.

Nun ist für unsere linearisierte Version der Einstein-Gleichungen in Newton-Näherung von den 10 Gleichungen nur eine von Interesse (! **Übung**: $\eta_{44} = ?$ und $T_a^a = ?$)

$$R_{44} = C_E \left(T_{44} - \frac{1}{2} \eta_{44} T \right) = \frac{C_E}{2} c^2 \varrho(\vec{r}) . \quad (71)$$

Um die Komponente des Ricci-Tensors zu bestimmen, greifen wir auf die Definition des Krümmungstensors (67) zurück, vernachlässigen quadratische Terme in den Christoffel-Symbolen – und verjüngen das erhaltene. Zudem ist zu beachten, dass Ableitungen nach x_4 den Faktor c^{-1} liefern und somit vernachlässigbar werden, womit man folgende Vereinfachungskette gewinnt:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^a &= \Gamma_{\alpha\beta,b}^a - \Gamma_{\alpha b,\beta}^a = \frac{1}{2} \eta^{as} \{ \delta_{s\beta,\alpha b} + \delta_{\alpha b,s\beta} - \delta_{\alpha\beta,bs} - \delta_{bs,\alpha\beta} \} \\ R_{44} &= R_{4a4}^a = \frac{1}{2} \eta^{as} [\delta_{s4,4a} + \delta_{4a,s4} - \delta_{44,as} - \delta_{as,44}] = -\frac{1}{2} \eta^{as} \delta_{44,as} . \end{aligned}$$

Da wir die Zeitableitungen (Index 4) in den Termen auf der rechten Seite vernachlässigen können – sprich die Indizes a und s nur über räumliche zu erstrecken sind, folgt unmittelbar

$$R_{44} = -\frac{1}{2} \Delta \delta_{44} = \frac{C_E}{2} c^2 \varrho(\vec{r}) . \quad (72)$$

Und es kommt noch besser, wenn man Gl. (65) und die Linearisierung (68) zu Grunde legt, wird man direkt auf die Poisson-Gleichung (88) geführt, d.h. es gilt:

$$\Phi = -\frac{c^2}{2} \delta_{44} . \quad (73)$$

Eine direkte Bestätigung unsere Vermutung (65) bringt die Analyse der Geodätengleichung (61) (prima **Übung**) – d.h. o.g. Näherungen angewandt auf die Geodätengleichung – die

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla \Phi \quad (74)$$

Newtonschen Bewegungsgleichung.

2.2.2 Beschleunigte Bezugssysteme/Rotation

Die gleichen Bewegungsgleichungen kann man in relativ eleganter Art und Weise in einem mitrotierendem Bezugssystem aufschreiben.

Zunächst kann eine Rotation um die z -Achse, bei der wir den Abstand zur Rotationsachse als konstant, $\rho = \text{konstant}$, ansehen formal mit der zeitlichen Ableitung beschrieben werden ($n = \dot{\varphi}$):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t} \right|_{\text{Rotation}} &= \rho \frac{d}{dt} (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \\ &= \rho \dot{\varphi} (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) \\ &= \rho n \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

aber kann alternativ auch als Vektorprodukt formuliert werden:

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & n \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_\varphi \rho n .\end{aligned}$$

Der Vergleich liefert unmittelbar $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{n} \times \vec{r} = n\rho\vec{e}_\varphi$ — läßt man nun auch noch die Änderung des Betrags dieses Vektors zu, ist zu schreiben.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}|_{FB} + \vec{n} \times \vec{r} , \quad (75)$$

wobei der Index (FB) für Führungsbewegung steht.

Allgemein gilt für einen beliebigen Vektor im beschleunigten System, welches mit der Winkelgeschwindigkeit \vec{n} rotiert, bezüglich des Führungsbezugssystems:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{A} = \dot{\vec{A}}|_{FB} + \vec{n} \times \vec{A}}$$

Daraus ergibt sich für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \dot{\vec{r}} + \vec{n} \times \vec{r} \\ \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \left(\frac{d}{dt}|_{FB} + \vec{n} \times \right) (\dot{\vec{r}} + \vec{n} \times \vec{r}) \\ &= \ddot{\vec{r}} + 2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}) + \dot{\vec{n}} \times \vec{r}\end{aligned}$$

Coriolisbeschleunigung: $2\vec{n} \times \dot{\vec{r}}$

Zentripetalbeschleunigung: $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})$

Winkelbeschleunigung: $\dot{\vec{n}} \times \vec{r}$

Speziell erhält man für $\vec{n} \perp \vec{r}$ und $\vec{n} = const.$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \ddot{\vec{r}} + 2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} - \vec{r}n^2 \\ m\ddot{\vec{r}}_i &= \sum_a \vec{F}_a + \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_I \\ \vec{F} &= -2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r}n^2\end{aligned}$$

Für ein Teilchen im Keplerfeld und $\dot{r} = 0$ ergibt sich:

$$\Rightarrow -n^2\vec{r} = \sum \vec{F} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$$

Ein fest im rotierenden Bezugssystem sitzender Massepunkt erfährt eine Zentripetalkraft. Für die Keplerbewegung folgt dann: $n^2 = \frac{\mu}{r^3}$, wobei $\mu = \gamma M_{ZK}$ mit M_{ZK} als Masse des Zentralkörpers bezeichnet und γ die Gravitationskonstante ist.

2.3 Koordinatentransformationen

In diesem Abschnitt werden wir zur Abkürzung die Matrix schreibweise bevorzugen. Gegeben seien zwei Koordinatensysteme, charakterisiert durch ihre Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3$ und $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_3$. Beide Basen seien über die Transformation

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{11} \cdots u_{1m} \\ \vdots \\ u_{n1} \cdots u_{nm} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \quad (76)$$

mit der unitären (orthogonalen) Transformationsmatrix

$$\hat{U} = [\hat{U}^{-1}]^T \quad ; \quad \hat{U}^{-1} \cdot \hat{U} = \hat{I} \quad ; \quad \det \hat{U} = 1 \quad .$$

Vektoren, z.B. \vec{A} , stellen wir nun als Matrizen dar $\vec{A} \rightarrow A^T = (A_1, A_2, A_3)$ bezüglich der Basis \vec{e}_i dar – und analog schreiben wir für $\vec{A}' \rightarrow (A')^T = (A'_1, A'_2, A'_3)$. In Einsteinscher Schreibweise haben wir

$$\vec{A}' = A'_i \vec{e}'_i = (A')^T \hat{U} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = A_j \vec{e}_j = \vec{A} \quad ,$$

womit man durch Koeffizientenvergleich sofort folgern kann:

$$A = \hat{U}^T A' = \hat{U}^{-1} A' \quad , \quad (77)$$

bzw.

$$A' = (\hat{U}^{-1})^T A = \hat{U} A \quad . \quad (78)$$

Fazit: Basen transformieren sich kovariant, die Koordinaten eines Vektors hingegen kontravariant bezüglich ihrer Basen.

Wieder sollen die Polarkoordinaten als Beispiel dienen, die durch die simple Drehung um die z-Achse und den Winkel φ darstellbar ist

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (79)$$

womit man leicht nachprüft, dass gilt

$$\hat{U}^T \hat{U} = \hat{I} \quad \text{und} \quad \hat{U}^T = \hat{U}^{-1} \quad .$$

Eine wichtige Anwendung dieser Matrizen sind Keplerorbits im Raum. Wie wir im übernächsten Kapitel zeigen werden, kann man z.B. Kepler-Ellipsen im Raum durch 3 Drehungen charakterisieren (siehe auch Abb. 4.1.3): Geht man von einer Koordinatenbasis $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ aus, bei der die x-Achse mit der Apsidenlinie identisch ist, die y-Achse senkrecht zur x-Achse – aber in der Orbitalebene gelegen – wohingegen \vec{e}_z senkrecht auf den beiden und auf der Orbitalebene steht. Der Orbit, gemessen in einem raumfesten allgemeinen Bezugssystem $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, kann dann durch 3 Drehungen charakterisiert werden:

1. Drehung \hat{U}_ϖ um \vec{e}_z und den Winkel $-\varpi$
2. Drehung \hat{U}_i um entstandene X' -Achse um den Winkel $-\iota$
3. dann Drehung \hat{U}_Ω um Z -Achse und den Winkel Ω

Man erhält (**Übung**)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \hat{U}_\Omega \hat{U}_i \hat{U}_\varpi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (80)$$

wobei die Rotationsoperatoren lauten:

$$\hat{U}_\varpi = \begin{pmatrix} \cos \varpi & -\sin \varpi & 0 \\ \sin \varpi & \cos \varpi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (81)$$

$$\hat{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \iota & -\sin \iota \\ 0 & \sin \iota & \cos \iota \end{pmatrix} \quad (82)$$

(83)

$$\hat{U}_\Omega = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

3 Das Gravitationspotenzial

Heuristischer Zugang:

Wenn man von dem Gravitationspotenzial einer Punktmasse m

$$\Phi(r) = -\gamma \frac{m}{r} \quad (85)$$

ausgeht, welches vom Abstand zur Punktmasse r bestimmt wird – und diesen Zusammenhang auf eine kontinuierliche Massenverteilung überträgt, erhält man

$$d\Phi = -\gamma \frac{dm(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = -\gamma \frac{dV \varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \quad (86)$$

wobei $|\vec{r}' - \vec{r}|$ den Abstand des Volumenelements dV vom Aufpunkt misst. Integration der Beziehung (86) ergibt dann letztlich das Green-Integral

$$\Phi(\vec{r}) = -\gamma \int d^3\vec{r}' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \quad (87)$$

welches die Lösung der Poissongleichung

$$\nabla \cdot [\nabla\Phi] = \Delta\Phi(\vec{r}) = 4\pi\gamma \varrho(\vec{r}) \quad (88)$$

darstellt. Man kann diese wichtige Gleichung auch analog zu elektrodynamischen Potenzial ableiten, wie wir kurz demonstrieren wollen.

Die Quellen der Gravitation sind Masseverteilungen im Raum ganz in Analogie zur Elektrodynamik, wo die Quellen des elektrischen Feldes bzw. der elektrischen Kraft, die Ladungen sind:

$$\nabla \cdot \vec{F} = C \gamma \varrho(\vec{r}) \quad , \quad (89)$$

mit der Gravitationskonstante γ und noch einer unbestimmten Konstante C . Um letztere fest zu machen, bedienen wir uns wieder der Heuristik im einfachsten – dem sphärisch symmetrischen – Fall und damit integrieren (! Kugelkoordinaten) wir Gl. (89) und gewinnen

$$\begin{aligned} \int_B d^3\vec{r} \nabla \cdot \vec{F}(r) &= \oint_{\partial B} d\vec{A}_r \cdot \vec{F}(r) \\ &= 4\pi r^2 F(r) = C\gamma M \end{aligned} \quad (90)$$

und die Kraft muss natürlich schließlich

$$F(r) = -\frac{\gamma M}{r^2} \quad (91)$$

ergeben. Koeffizientenvergleich liefert sofort die gefragte Konstante

$$C = 4\pi \quad . \quad (92)$$

Die Gravitationskraft ist natürlich konservativ (wie in einer **Übung** gezeigt werden darf):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \int_B (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Satz von Stokes}).$$

Die Wegunabhängigkeit bedingt, dass der Integrand im Flächenintegral verschwinden muss:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= 0 \\ \implies \vec{F} &= -\nabla\Phi\end{aligned}$$

womit wir dann die Poisson-Gleichung wieder gewonnen haben

$$\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = 4 \pi \gamma \varrho(\vec{r})} \quad (93)$$

deren Lösungen bei gegebenen Randbedingungen das Gravitationspotenzial eindeutig definiert. Man erinnere sich einer analogen Gleichung für das elektrische Potenzial $\Delta\varphi = -\varrho_L/\varepsilon_0$, wobei hier ϱ_L die Ladungsdichte ist.

Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ist durch die Greenfunktion gegeben.

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= -\gamma \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ \implies \nabla\Phi &= \gamma \int \frac{\varrho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'\end{aligned} \quad (94)$$

Die Divergenz der Gl. (94) muss wieder die Poissongleichung (88) — die Probe zeigt die Richtigkeit der Lösung:

$$\Delta\Phi = \gamma \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \int \frac{\varrho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Bei der weiteren Betrachtung des Integrals werden zwei Annahmen gemacht. Einerseits wird die Massendichte des Raumes als homogen angenommen ($\varrho(\vec{r}) = \text{const.}$) und andererseits das Integral bezüglich eines kleinen Volumenelementes betrachtet – beides ist ohne Einschränkung des allgemeinen Falls möglich, wie wir gleich sehen werden. Damit ergibt sich mit $\vec{\delta} = \vec{r}' - \vec{r}$ und unter Benutzung des Gauß'schen Satzes:

Abbildung 1:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \gamma\varrho(\vec{r}) \int \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = -\gamma\varrho(\vec{r}) \int \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \cdot \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dV' \\ &= \gamma\varrho(\vec{r}) \oint_{\partial K_\delta} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} d\vec{A} \\ &= \gamma\varrho(\vec{r}) \oint_{\partial K_\delta} \frac{\delta^2 \sin\vartheta}{\delta^3} \delta \vec{e}_\delta \cdot \vec{e}_\delta d\varphi d\vartheta = \gamma\varrho(\vec{r}) \oint_{\partial K_\delta} \sin\vartheta d\varphi d\vartheta \\ \implies \Delta\Phi &= 4\pi\gamma\varrho(\vec{r})\end{aligned}$$

Man beachte, dass für $|\vec{\delta}| > 0$ gilt

$$\nabla' \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{3}{\delta^3} + \frac{3\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}}{\delta^5} = 0$$

womit klar wird, dass Beiträge zum Integral nur aus der unmittelbaren Nähe, $|\vec{\delta}| \rightarrow 0$, stammen können, so dass man setzen kann $\varrho(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}')$ und die Dichte aus dem Integral gezogen und bei $\delta \rightarrow 0$ sphärische Symmetrie angenommen werden kann.

3.1 Skizze der Greenschen Lösung

Greensche Methode: gegeben sei eine inhomogene partielle Differentialgleichung

$$\hat{O}(\vec{p}, \vec{r}, t) \psi = A(\vec{r}) \quad (95)$$

es existiere eine Funktion für die gilt:

$$\hat{O} G(\vec{r}|\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (96)$$

dann kann eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (96) wie folgt dargestellt werden

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}') A(\vec{r}') \quad (97)$$

Genau in diesem Sinne ist das Integral (94) als Lösung der Poissongleichung (88) zu verstehen.

Es sei noch eine einfache, eindimensionale plausible Darstellung nachgereicht: gegeben sei die partielle Differentialgleichung,

$$\hat{\mathcal{D}} y(x) = f(x) \quad (98)$$

die wir mit dem Ansatz

$$y(x) = \int dx' G(x, x') f(x') \quad (99)$$

zu erschlagen gedenken. Setzen wir diese Lösung wiederum in die obige Dgl. ein, erhalten wir just

$$\hat{\mathcal{D}} y(x) = \int dx' \hat{\mathcal{D}} G(x, x') f(x') = f(x) \quad (100)$$

womit unmittelbar klar wird, dass gelten muss

$$\hat{\mathcal{D}} G(x, x') = \delta(x - x') \quad (101)$$

Es muss also die Greensche Funktion als Lösung der Differentialgleichung mit der Delta-Inhomogenität gefunden werden, was man meist stückweise angeht, d.h. $\vec{r} \neq \vec{r}'$ also die homogene und dann müssen Stetigkeiten bzw. Konvergenzen für betreffenden Punkt weiterhelfen (z.B. durch Integration).

3.1.1 Berechnung der Greenschen Funktion

Betrachte inhomogene pDgl. (λ sei kein Eigenwert) die gewissen (homogenen - nicht zeitveränderlichen RB's genüge) – $\hat{\mathcal{D}}$ sei hermitesch

$$\hat{\mathcal{D}}y(\vec{r}) - \lambda y(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad (102)$$

(Beispiele \Rightarrow siehe Vorlesung).

1. *Entwicklung nach EF's:*

$$y(\vec{r}) = \sum_i c_n |n\rangle \quad \& \quad f(\vec{r}) = \sum_i \langle n|f\rangle |n\rangle \quad (103)$$

nach Einsetzen und beachten des EWP's $\hat{\mathcal{D}}|n\rangle = \lambda_n |n\rangle$ erhalten wir aus Gl. (102) durch Vergleich

$$c_n = \frac{\langle n|f\rangle}{\lambda_n - \lambda} \quad (104)$$

$$y(\vec{r}) = \int_B d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') \quad ; \quad G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_n \frac{\varphi_n^*(\vec{r}') \varphi_n(\vec{r})}{\lambda_n - \lambda} \quad (105)$$

wobei die Greensche Funktion der Differenzialgleichung

$$\hat{\mathcal{D}}G(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (106)$$

genügen muss.

2. *Spektrale Methode:*

Man wende auf die Gleichung (106) eine Fouriertransformation an und erhält

$$\{\tilde{\mathcal{D}}(i\vec{k}, -k^2 \dots) - \lambda\} \tilde{G}(\vec{k}) = 1 \quad (107)$$

wobei wir die Translationsinvarianz der Gleichung bzgl. der puren Abhängigkeit der Dgl. von $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}'$ beachtet haben. Damit gewinnt man die Fourierkomponente der Greenschen Funktion $\tilde{G}(\vec{k})$ aus einer simplen algebraischen Umstellung, deren Rücktransformation unter Rückersetzung von \vec{x} durch $\vec{r} - \vec{r}'$ die Greensche Funktion liefert

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = y(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (108)$$

3.1.2 Berechnung von Gravitationsfeldern von Masseverteilungen

Für den Innenraum sind nun $\Delta\Phi = 4\pi\gamma\rho(\vec{r})$ und für den Außenraum $\Delta\Phi = 0$ zu lösen. Die Himmelsmechanik befasst sich mit der Dynamik von Himmelskörpern – wie der Name schon vermuten lässt. Diese besitzen näherungsweise Kugelformen und Kugelkoordinaten scheinen geeignet zur Beschreibung. Die Abweichungen davon lassen sich durch die Multipolentwicklung erfassen. Somit führt die Berechnung zunächst zu den Legendrepolynomen. Die Erzeugenden dieser sind mit der Außenraumentwicklung $|r| \gg r'$ und $z = r'/r \ll 1$:

$$\begin{aligned} |\vec{r}' - \vec{r}|^{-1} &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta)^{-1/2} = \frac{1}{r} (1 + z^2 - 2zt)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} (P_0(t) + P_1(x)z + P_2(x)z^2 + \dots) \\ \implies \phi &= -\gamma \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\sum_0^\infty P_i z^i \right) d^3r' \end{aligned}$$

Das Integral kann nun mit Verwendung von Kugelkoordinaten in den Grenzen für den Himmelskörper ausgewertet werden. Mit R_p als Äquatorialradius eines abgeplatteten Planeten oder Sterns folgt dann mit der Definition des Greenschen Integrals (94) das Potenzial:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\gamma M}{r} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{R_p}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) \right) \quad (109)$$

Im Folgenden sei eine homogene Dichte $\rho(\vec{r}') = \rho_0$ angenommen. Die φ -Unabhängigkeit reflektiert die Axialsymmetrie des Potentials eines Rotationsellipsoids, wie es abgeplattete Himmelskörper hauptsächlich darstellen. Die einzelnen Momente der Entwicklung mit $\mu = \gamma M$ lauten:

$$\begin{aligned} 0. \text{ Moment: } \phi &= -\frac{\mu}{r} \text{ (Punktmasse)} \\ 1. \text{ Moment: } \phi &= \frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) \text{ (Quadrupolmoment)} \\ &\vdots \\ \implies \text{ grav. Potential: } \Phi &= -\frac{\mu}{r} \left(1 - J_2 \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) \pm \dots \right) \end{aligned}$$

Hier nun ein paar Zahlenbeispiele für die Momente:

4 Das Zwei-Körper-Problem

4.1 Ungestörtes ZKP

Das Zwei-Körper-Problem (ZKP) beschreibt die Bewegung zweier, umeinander kreisender Körper, die sich gravitativ anziehen – ausgedrückt in Bewegungsgleichungen (für $i = 1, 2$):

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\gamma \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{F}_{ij} \quad . \quad (110)$$

Das ZKP kann auf das Kepler-Problem zurückgeführt werden. Dabei wird die Bewegung der Körper in eine Drehbewegung der relativen Abstände beider Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt und die Schwerpunktbewegung zerlegt – wobei letztere geradlinig gleichförmig ist. Bei der eigentlichen Drehbewegung gelten der Energie- und der Drehimpulserhaltungssatz.

Zunächst definieren wir die Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, den Schwerpunkt

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad , \quad (111)$$

den konstanten Faktor $\mu = \gamma (m_1 + m_2)$, das Effektivpotenzial sowie den Drehimpuls:

$$\Phi_{eff}(r) = \frac{L^2}{2r^2} + \phi(r) \quad (112)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} \quad . \quad (113)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten im Einzelnen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (114)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (115)$$

Multipliziert man die obigen Gleichungen mit m_2 bzw. m_1 :

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma m_1 m_2^2 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (116)$$

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \gamma m_1^2 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (117)$$

und subtrahiert (114)-(115) beide voneinander, erhält man

$$\ddot{\vec{r}} = -\gamma (m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F} \quad . \quad (118)$$

O.E.d.A. kann eine Bewegung in der Ebene $z = 0$ angenommen werden, so dass mit Polarkoordinaten $\vec{r} = r \vec{e}_r = r(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j})$ die Bewegung geschrieben werden kann:

$$\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (\text{r-Komponente}) \quad .$$

Die Drehimpulserhaltung folgt aus der Tatsache, dass die Gravitation $\vec{F} \propto \vec{r}$ eine Zentralkraft ist, d.h. es gilt $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$, (da ja gilt: $\vec{r} \times \vec{r} = 0$), ergibt sich zwangsläufig:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 2r\dot{\varphi}\vec{e}_z = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (\text{Drehimpulserhaltung}) \quad , \quad (119)$$

so dass mit Betrag des Drehimpulses

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = r^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (120)$$

für die r-Komponente der Bewegungsgleichung geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{L^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} \\ &= -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial r} \quad . \end{aligned} \quad (121)$$

Hierbei ist das Effektivpotenzial mit Gl. (112) gegeben und das Gravitationspotenzial lautet

$$\Phi(r) = -\frac{\mu}{r} \quad . \quad (122)$$

4.1.1 Lösung ZKP

Mit der Drehimpulserhaltung (119) und $\frac{d}{dt} \rightarrow \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{Lr'}{r^2} \right) = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{L}{r^2} r' \right) \\ &= \frac{L}{r^2} \left(-\frac{2L}{r^3} r'^2 + \frac{L}{r^2} r'' \right) \\ \implies r'' &= \frac{2r'^2}{r} + r - \mu \left(\frac{r}{L} \right)^2 \end{aligned} \quad (123)$$

wobei r' die partielle Ableitung nach φ , dem Azimutalwinkel, bedeutet.

Anschließend substituieren wir $r = 1/x$, womit man erkennt, dass letztlich die Gleichung eines harmonischen Oszillators (124) zu lösen bleibt.

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{x'}{x^2} \\ r'' &= 2\frac{x'^2}{x^3} - \frac{x''}{x^2} \\ \implies x'' + x - \frac{\mu}{L^2} &= 0 \end{aligned} \quad (124)$$

Nach einer weiteren simplen Translations-Trafo $y = x - \mu/L^2$ kann diese Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (124) mit $x = A \cos(\varphi - \tilde{\omega})$ und $\tilde{\omega}$ als Länge des Perizentrums gelöst werden, wobei sich dann die Kegelschnitte des Keplerproblems ergeben.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{r} = A \cos \varphi + \frac{\mu}{L^2} \\ \implies r &= \frac{L^2/\mu}{1 + AL^2/\mu \cos f} \quad \text{mit } f = \varphi - \tilde{\omega} \end{aligned}$$

Man definiert für diese Polardarstellung der Kegelschnitte nun den Begriff der Exzentrizität $e = AL^2/\mu$ und gewinnt

$$\boxed{r = \frac{Ae}{1 + e \cos f} = \frac{p}{1 + e \cos f}} \quad (125)$$

mit dem *semi-latus rectum*

$$p(e) = \frac{L^2}{\mu} \quad (126)$$

dessen Abhängigkeit von der Exzentrizität e vom Bahntyp abhängt: $p = a(1 - e^2)$ für die Ellipse ($e < 1$), $p = a(e^2 - 1)$ für die Hyperbel ($e > 1$) – und für die Parabel schließlich $p = q(1 + e) = 2q$ (q Abstand Perizentrum vom Fokus, $e \rightarrow 1$, siehe unten).

Bahnenergie

Die Darstellung der Bahnenergie nach Lagrange erhält man am einfachsten mittels des kleinsten Bahnradius r_{min} , der Lage des Perizentrums PZ, an dem $\dot{r} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ r &= \frac{L^2/\mu}{1 + e \cos f} \xrightarrow{\cos f \rightarrow 1} r_{min} = \frac{L^2/\mu}{1 + e} \\ E &= \left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \right) \Big|_{PZ} = \frac{L^2}{2r_{min}^2} - \frac{\mu}{r_{min}} \\ &= \frac{L^2\mu^2(1+e)^2}{2L^4} - \frac{\mu^2(1+e)}{L^2} = \frac{\mu^2(1+e)}{2L^2}(e-1) \\ &\implies \boxed{E = \frac{\mu^2}{2L^2}(e^2 - 1)} \end{aligned} \quad (127)$$

$e < 1$: Ellipse $\implies E < 0$ ($e = 0$: Kreis)

$e > 1$: Hyperbel $\implies E > 0$

$e = 1$: Parabel $\implies E = 0$

Bahndrehimpuls

Die nächsten Betrachtungen beziehen sich zunächst auf eine Ellipsenbahn – allgemeinere Beziehungen werde unten angegeben. Bei der Ellipse kann der Keplersche Flächensatz wie folgt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} L &= r^2 \frac{d}{dt} \varphi \\ L T &= \int_0^{2\pi} d\varphi r^2(\varphi) = 2A \end{aligned} \quad (128)$$

Abbildung 2: charakteristisches Dreieck der Ellipse

mit der Fläche der Ellipse

$$A = \pi ab \quad \text{und} \quad b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

wobei a und b die Halbachsen der Ellipse sind.

Nach der Impulserhaltung/Flächensatz $\vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ ergibt sich aus der Fläche des Parallelogramms $L = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = 2\dot{A} = r^2\dot{\varphi}$ und mit der mittleren Bewegung (Winkelgeschwindigkeit, oft auch mit Ω bezeichnet) $n = 2\pi/T$ damit für die Ellipse :

Abbildung 3:

$$2A = 2 \pi ab = \int_0^T L dT = TL \implies n(a) = \frac{L}{ab} = \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}}$$

und letztlich für den Bahndrehimpuls

$$\implies \boxed{L = n a^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}} \quad (129)$$

mit der mittleren Bahnbewegung

$$n(a) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (130)$$

und dem Radius

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad .$$

Für die Hyperbel gewinnen wir mit $e > 1$

$$\implies \boxed{L = n a^2 \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{\mu a (e^2 - 1)}} \quad (131)$$

Zeitabhängigkeiten – Keplergleichung

Zunächst wollen wir allgemeine Beziehungen für die Zeitabhängigkeiten aus dem Flächensatz (Drehimpulserhaltung) ableiten um danach geometrische Begründungen für die entstandenen Beziehung nachzureichen.

Wie im Falle des Drehimpulses integrieren wir Gl. (128), allerdings lassen wir Zeit und korrespondierenden Winkel frei (oben habe wir über die Bahnperiode T der Ellipse integriert) und erhalten

$$t - t_0 = \frac{L^3}{\mu^2} \int_0^{\varphi(t)} df (1 + e \cos f)^{-2} . \quad (132)$$

Zunächst vereinfachen wir das Integral, indem wir durch die Transformation

$$\tau = \tan \frac{f}{2} \quad \text{mit} \quad \cos f = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \quad \text{und} \quad df = \frac{2}{1 + \tau^2} d\tau \quad (133)$$

den Integranden in eine gebrochen rationale Funktion

$$t - t_0 = \frac{2L^3}{\mu^2} \int_0^{\tau(t)} d\tau \frac{1 + \tau^2}{[(1 + e) + (1 - e)\tau^2]^2} \quad (134)$$

umschreiben.

Diese Integral auf der rechten Seite muss jetzt für alle drei Bahntypen separat gelöst werden. Am Einfachsten läßt sich das für die Parabel durchführen, wofür sogar eine geschlossene Lösung angegeben werden kann, was für die anderen beiden Fälle nicht gelingt.

(A) Parabel:

Für den Fall, $e = 1$, können wir Gl. (134) direkt integrieren

$$t - t_0 = \frac{L^3}{2\mu^2} \int_0^{\tau(t)} d\tau (1 + \tau^2) = \frac{L^3}{2\mu^2} \left[\tau(t) + \frac{\tau(t)^3}{3} \right] . \quad (135)$$

Mit der Einführung der parabolischen mittleren Anomalie

$$\Lambda = \frac{\mu^2}{L^3} (t - t_0) \quad (136)$$

gewinnt man die *Barkers*-Gleichung

$$\tau^3 + 3\tau - 6\Lambda = 0 , \quad (137)$$

die man mit den Cardanschen Formeln wie folgt löst

$$\tau(t) = \sqrt[3]{3\Lambda + \sqrt{1 + 9\Lambda^2}} + \sqrt[3]{3\Lambda - \sqrt{1 + 9\Lambda^2}} \quad (138)$$

$$\varphi(t) = 2 \arctan \tau(t) , \quad (139)$$

so dass man jetzt explizit die Bahnkurve $\vec{r}(t) = r(\varphi(t)) \vec{e}_r$ bestimmen kann.

Die Parameterform der Parabel folgt mit $p = 2q$ und $e = 1$ zu

$$r(f) = \frac{2q}{1 + \cos f} = \frac{q}{\cos^2 \frac{f}{2}} , \quad (140)$$

wobei man zu $p = a(1 - e)(1 + e)$, dem Semilatus Rectum der Parabel, noch ein paar Worte fallen lassen sollte. Dazu gehen wir von der Ellipse aus und wagen dann den Grenzübergang $e \rightarrow 1$. Aus der Energie $E = -\mu/2a \rightarrow 0$ folgt sofort, dass für die Halbachse gilt $a \rightarrow \infty$, andererseits verschwindet der Faktor $(1 - e) \rightarrow 0$. Das Produkt $q = a(1 - e)$ besitzt jedoch einen endlichen Grenzwert, die parabolische Perizentrumsdistanz q .

Die Normalform der Parabel erhalten wir in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung $2q = p$ vom Brennpunkt entfernt ist. Dort gilt dann $x = p - r \cos f$ und $y = r \sin f$, wir eliminieren $\cos f = (p - x)/r$ und setzen das in Gl. (140) ein und erhalten:

$$r = \frac{pr}{p + r - x} \Rightarrow r = x \quad (141)$$

einen Ausdruck für die Ortsdefinition der Parabel – der senkrechte Abstand x eines Parabelpunktes von der Leitlinie (y - Achse) ist gleich dem Abstand vom Fokus r ! Mit dem Ausdruck $r = \sqrt{(p - x)^2 + y^2} = x$ gewinnt man sofort die Parabelgleichung in Normalform

$$y^2 = 4q(x - q) . \quad (142)$$

Für Ellipse und Hyperbel funktioniert das nicht so einfach - die Fälle werden wir jetzt behandeln.

(B) Ellipse:

In diesem Fall gilt $e < 1$ und wir erhalten mit der Transformation

$$\tau = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \kappa = \frac{v_p}{an(a)} \kappa \quad (143)$$

das Integral

$$\frac{\mu^2}{L^3} (t - t_0) = \frac{2}{\sqrt{(1 - e^2)^3}} \int_0^{\kappa(t)} d\kappa \frac{(1 - e) + (1 + e)\kappa^2}{(1 + \kappa^2)^2} . \quad (144)$$

Es braucht eine weitere Transformation – Einführung der *exzentrischen Anomalie* \tilde{E} –

$$\kappa = \tan \frac{\tilde{E}}{2} \Leftrightarrow d\tilde{E} = \frac{2}{1 + \kappa^2} d\kappa \quad (145)$$

mit der man (**feine Übung**) dann gewinnt

$$\frac{\mu^2}{L^3} (t - t_0) = \frac{2}{\sqrt{(1 - e^2)^3}} \int_0^{\tilde{E}(t)} d\tilde{E} (1 - e \cos \tilde{E}) = \frac{2}{\sqrt{(1 - e^2)^3}} (\tilde{E} - e \sin \tilde{E}) . \quad (146)$$

Simple Umformungen führen auf die **berühmte Kepler-Gleichung**:

$$\boxed{M = n(a)(t - t_0) = (\tilde{E} - e \sin \tilde{E})} . \quad (147)$$

Die dazugehörige Parameterdarstellung des Abstands vom Zentralkörper lautet

$$\boxed{r(\tilde{E}) = a (1 - e \cos \tilde{E})} \quad (148)$$

wie unten geometrisch begründet wird (**Übung:** $r(\tilde{E})$ aus *differenziellen Flächensatz berechnen*).

(C) Hyperbel:

Für Hyperbeln gilt: $e > 1$. Zur Lösung des Integrals in Gl. (134) wählen wir folgende Transformation:

$$\tau(t) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \kappa(t) \quad \text{und} \quad d\tau = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} d\kappa , \quad (149)$$

womit man für das zu lösende Integral erhält

$$\frac{\mu^2}{L^3} (t - t_0) = \frac{2}{\sqrt{(e^2 - 1)^3}} \int_0^{\kappa(t)} d\kappa \frac{(1+e) + (e-1)\kappa^2}{(\kappa^2 - 1)^2} . \quad (150)$$

Weitere Substitution – Einführung der *hyperbolischen exzentrischen Anomalie* \tilde{U} – ergibt

$$\tanh \frac{\tilde{U}}{2} = \kappa \quad (151)$$

führt letztlich zur

$$M = n(a)(t - t_0) = e \sinh \tilde{U} - \tilde{U} \quad (152)$$

Kepler-Gleichung für Hyperbeln.

(D) Geometrische Interpretationen:

Bei einer Ellipse gelten allgemein die Beziehungen:

$$a^2 = b^2 + a^2 e^2 \implies b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (153)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ellipse} \quad (154)$$

$$x^2 + y'^2 = a^2 \quad \text{Kreis} \quad (155)$$

$$\implies \frac{b}{a} = \frac{y}{y'} \quad (156)$$

Nach Abbildung 4 ergeben sich als einfache Winkelbeziehungen:

Abbildung 4: Variablen zur Beschreibung der Bahn relativ zum Zentrum der Ellipse und nicht der wahren Bewegung um einen Brennpunkt derselben

$$r^2(\tilde{E}) = (\overline{DF})^2 + (\overline{DP})^2$$

$$(\overline{DF}) = r \cos f = -r \cos(\pi - f) = (\overline{CD}) - (\overline{CF}) = a(\cos \tilde{E} - e) \quad (157)$$

$$(\overline{DP}) = r \sin f = y = \frac{b}{a}y' = b \sin \tilde{E} = a\sqrt{1 - e^2} \sin \tilde{E} \quad (158)$$

und wir erhalten

$$\implies \boxed{r(\tilde{E}) = a(1 - e \cos \tilde{E})} \quad . \quad (159)$$

Die zeitliche Darstellung der Ellipsenbahn erhält man durch ein paar Umformungen und dem Drehimpuls

$$L = r^2 \dot{\varphi} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{r^2}{L} d\varphi \quad . \quad (160)$$

Man bilde

$$\tan f = \frac{(158)}{(157)} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \tilde{E}}{(\cos \tilde{E} - e)}$$

und differenziere

$$d \tan f = \frac{d\varphi}{\cos^2 f} = \frac{\sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos \tilde{E})}{(\cos \tilde{E} - e)^2} d\tilde{E} \quad . \quad (161)$$

Mit Gl. (157) erhält man nach Umstellen

$$\begin{aligned} d\varphi &= \cos^2 f \frac{\sqrt{1-e^2}(1-e\cos\tilde{E})}{(\cos\tilde{E}-e)^2} d\tilde{E} \\ &\stackrel{(157)}{=} \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}(1-e\cos\tilde{E}) d\tilde{E} \end{aligned} \quad (162)$$

Schließlich gewinnt man mit Gl. (160)

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu a(1-e^2)} dt &= a^2 \sqrt{1-e^2} (1-e\cos\tilde{E}) d\tilde{E} \\ n(a) dt &= (1-e\cos\tilde{E}) d\tilde{E} \end{aligned} \quad (163)$$

Integriert man diese Gleichung, so reproduziert man die zeitabhängige Darstellung der Ellipse (147):

$$\begin{aligned} n(a)(t-t_0) &= \tilde{E} - e \sin \tilde{E} \\ r &= a(1-e\cos\tilde{E}) \quad . \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung der Hyperbel liegen andere geometrische Voraussetzungen zugrunde, die in der folgenden Abbildung illustriert werden und auf die sich alle weiteren Beziehungen beziehen. Zunächst wird ein Parameter \tilde{H} in geometrischer Analogie zur exzentrischen Anomalie der Ellipse für die Hyperbel eingeführt, der sich jedoch von der Bedeutung bei der Ellipse unterscheidet – wie wir sofort sehen werden.

Abbildung 5: Geometrische Beziehungen bei der Beschreibung der Hyperbelbahn einen Parameter \tilde{H}

$$\begin{aligned} x &= r \cos f \\ a &= \tilde{y} \cos \tilde{H} \implies \tilde{y} = \frac{a}{\cos \tilde{H}} \\ \implies ae &= x + \tilde{y} = r \cos f + a \sec \tilde{H} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem beschreibenden Winkel f der Hyperbelbahn und dem Parameter der Hyperbel \tilde{H} :

$$\cos f = \frac{a(e - \sec \tilde{H})}{r} \quad \text{wobei gilt} \quad \sec \tilde{H} = \frac{1}{\cos \tilde{H}} \quad . \quad (164)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung des allgemeinen Kegelschnitts (125) ergibt sich die Darstellung der Hyperbelbahn als Funktion des Parameters:

$$r = a(e \sec \tilde{H} - 1) , \quad (165)$$

wobei man im Vergleich mit Gl. (152), dass man die *hyperbolische Keplergleichung* reproduziert, wenn folgende Identität gilt

$$\sec \tilde{H} = \cosh \tilde{U} , \quad (166)$$

über deren Bedeutung man sich in einer **Übung** Klarheit verschaffen sollte (Wiederholung: *Hyperbelfunktionen und Beziehungen zu Winkelfunktionen*). Man erhält also wie gehabt:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= n^{-1} (e \sinh \tilde{U} - \tilde{U}) \\ r &= a (e \cosh \tilde{U} - 1) \end{aligned}$$

Für die verschiedenen Keplerlösungen ergibt sich folgende Auflistung.

Ellipse	Hyperbel	Parabel
$n(t - t_0) = (\tilde{E} - e \sin \tilde{E})$	$n(t - t_0) = (e \sinh \tilde{U} - \tilde{U})$	
$r = a(1 - e \cos \tilde{E})$	$r = a(e \cosh \tilde{U} - 1)$	
$\tau = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \kappa, \kappa = \tan\left(\frac{\tilde{E}}{2}\right)$	$\tau = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \kappa, \kappa = \tanh\left(\frac{\tilde{U}}{2}\right)$	$\tau^3 + 3\tau = 6\frac{\mu^2}{L^3}(t - t_0)$
$\tau = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$	$\tau = \tanh\left(\frac{\varphi}{2}\right)$	$\tau = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

allgemeine Keplergleichungen	
$L = r^2 \dot{\varphi}$	$r = \frac{L^2/\mu}{1+e \cos f} \quad \int r^2 d\varphi = L(t - t_0)$

4.1.2 Lösung der Kepler-Gleichung

So unscheinbar die Kepler-Gleichung (147) einem auch erscheinen mag, wegen der Transzendenz in \tilde{E} kann sie nicht explizite in $\tilde{E}(M)$ aufgelöst werden. Seit mehr als drei Jahrhunderten tauchen immer wieder regelmäßig (alle Dekaden) neue Lösungsversuche auf — vergeblich, man findet prinzipiell keine geschlossene, einfache Darstellung der Form $\tilde{E}(M)$.

Eine Möglichkeit bietet die iterative Methode

$$\tilde{E}_{i+1} = M + e \sin \tilde{E}_i \quad (167)$$

für $i \in \mathbb{N}$, wobei als Iterationsanfang dient

$$\tilde{E}_0 = M . \quad (168)$$

Mit den Additionstheoremen und Reihenentwicklungen für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin x &\approx x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) ; \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) \end{aligned}$$

gewinnt man schnell für die ersten drei Iterationen

$$\tilde{E}_1 = M + e \sin M \quad (169)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 &= M + e \sin(M + e \sin M) \approx M + e \sin M \cos(e \sin M) + e^2 \sin M \cos M \\ &\approx M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M + O(e^3) \end{aligned} \quad (170)$$

$$\tilde{E}_3 \approx M + \left(e - \frac{1}{8}e^3\right) \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M + O(e^4) . \quad (171)$$

In Verallgemeinerung dieser induktiven Schritte gelangt man zu einer Fourierreihe

$$\tilde{E} - M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(e) \sin kM . \quad (172)$$

Man sollte im Hinterkopf behalten, dass diese Reihe divergiert für Exzentrizitäten $e > 0.66$, so dass dann nur noch numerische Methoden (Newton Methode, siehe unten) – die von einer solchen Konvergenz unberührt bleiben – zum Ziel führen. Zunächst werden wir Entwicklungen für elliptische Bahnen vorstellen, die in der Regel auch die häufigsten Bahnprobleme sind.

Elliptische Entwicklungen:

Für die meisten Probleme könne die Exzentrizität e und die Inklination i als kleine Größen angesehen werden – z.B. in planetaren Ringen sind die entsprechenden numerischen Werte $\langle e \rangle; \langle i \rangle < 10^{-6}$. Damit ist es vorteilhaft die Kepler-Gleichung $\tilde{E} - M = e \sin \tilde{E}$ nach diesen kleinen Parametern zu entwickeln. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine ungerade Funktion, so dass es Sinn macht, nach Sinus-Funktionen zu entwickeln

$$e \sin \tilde{E} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(e) \sin kM , \quad (173)$$

wobei die Koeffizienten sofort als

$$\begin{aligned} b_k(e) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dM e \sin \tilde{E} \sin kM \\ &= \frac{2}{k\pi} \underbrace{\left[e \sin \tilde{E} \cos kM \right]_0^{\pi}}_{\equiv 0} + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} dM \left(\frac{d\tilde{E}}{dM} - 1 \right) \cos kM \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} d\tilde{E} \cos kM - \underbrace{\frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} dM \cos kM}_{\equiv 0} . \end{aligned} \quad (174)$$

Im ersten Integral ersetzen wir die *mittlere Anomalie* kM im Argument der Kosinusfunktionen wieder durch die Kepler-Gleichung $kM = k(\tilde{E} - e \sin \tilde{E})$ und

gewinnen

$$b_k(e) = \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi d\tilde{E} \cos [k(\tilde{E} - e \sin \tilde{E})] = \frac{2}{k} J_k(ke) \quad (175)$$

mit der Besselfunktion erster Art

$$J_k(x) = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(x/2)^{2\nu}}{\nu!(k+1)(k+2)\dots(k+\nu)} \quad , \quad (176)$$

die die Exzentrizitätsabhängigkeiten der Koeffizienten $b_k(e)$ beschreiben. Damit lautet die Lösung der Kepler-Gleichung für den Ellipsenfall

$$\tilde{E} = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke) \sin kM}{k} \quad (177)$$

$$= M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + e^3 \left(\frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M \right) + O(e^4) \quad , \quad (178)$$

die wir auch schon im Falle der Iterationen näherungsweise erhielten.

Einige wichtige Entwicklungen, die wir später im Zusammenhang mit der Ableitung der Störungsfunktionen (- potenziale) brauchen und die alle auf der hier vorgestellten elliptischen Entwicklung beruhen, wollen wir hier noch einfach angeben:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{d}{de} J_k(ke) \cos kM \quad (179)$$

$$\approx 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M) + O(e^3) \quad ,$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = 1 + 3e \cos M + e^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cos 2M \right) + O(e^3) \quad , \quad (180)$$

$$\cos \tilde{E} = -\frac{1}{2}e + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{d}{de} J_k(ke) \cos kM \quad (181)$$

$$\approx \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) + O(e^3)$$

$$\sin f = 2\sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{d}{de} J_k(ke) \sin kM \quad (182)$$

$$\approx \sin M + e \sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right) + O(e^3)$$

$$\cos f = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM \quad (183)$$

$$\approx \cos M + e(\cos 2M - 1) + \frac{9e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) + O(e^3)$$

$$f - M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} \left\{ 2 \sin M - \frac{3}{4} e \sin 2M + \dots \right\} \quad (184)$$

$$\approx 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + e^3 \left(\frac{13}{12} \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M \right) + O(e^4) \quad .$$

Neben den analytischen Methoden werden erfolgreich numerische Lösungsverfahren verwendet. Zum Beispiel die Verwendung des Newton-Iterations-Verfahrens, welches die Nullstellen der Funktion:

$$F(\tilde{E}) = \tilde{E} - e \sin \tilde{E} - M = 0 \quad (185)$$

zurück liefert. Das könnte man mit der Programmiersprache C oder FORTRAN oder auch IDL zuhause als **Übung** programmieren.

Die Gyrozentrums-Näherung:

Bei dieser Entwicklung dreht es sich darum, die Bahnellipse um ein Gyrozentrum – oder auch Führungszentrum genannt – zu entwickeln, welches ein Kreisbahn-Orbit mit gleicher Halbachse a wie die Ellipse ist. Diese Bewegung im Gyrozentrum wird auch Epizyklusbewegung genannt und für kleine Exzentrizitäten gebräuchlich und im Zusammenhang mit der Störungstheorie von großem Nutzen. Hier werden wir berechnen, welche Gestalt die Epizyklusbewegung hat.

Eine solche Entwicklung macht natürlich Sinn, da beide Bahnen, die Ellipse und die Kreisbahn, gleiche Umlaufzeiten haben und die Bewegung im Koordinatensystem des Führungszentrums geschlossen ist. Mathematischer Ausdruck dieses Sachverhaltes ist die Kräftebilanz

$$\left(\dot{M}\right)^2 a = n^2 a = \frac{\mu}{a^2} , \quad (186)$$

wobei a die (konstante) große Halbachse des elliptischen aber auch des Kreisbahnorbites ist.

Wir verlagern unseren Ursprung des Koordinatensystems (x, y) in ein Referenzpunkt auf der Kreisbahn, dessen mittlere Bewegung $M(t)$ ist – mit $\vec{R} = R\vec{e}_R$ und $X = R \cos f$; $Y = R \sin f$ sowie dem Einheitsvektor $\vec{e}_a = \cos M \vec{i} + \sin M \vec{j}$. Hier bezeichnen \vec{i} und \vec{j} die Einheitsvektoren in X und in Y Richtung im Inertialsystem. Das Teilchen auf der elliptischen Bahn habe folgende Lagekoordinaten

$$\vec{R} = R \vec{e}_R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \vec{e}_R \quad (187)$$

$$\vec{e}_R = \cos f \vec{i} + \sin f \vec{j} . \quad (188)$$

Gemäß der oben abgeleiteten Entwicklungen (184) gilt $f \rightarrow M$ und für kleine Exzentrizitäten oszilliert das Teilchen auf einer geschlossenen Bahn um das Gyrozentrum. Die Bahnkurve gilt es jetzt zu bestimmen und dessen Koordinaten lauten Im Gyrosystem:

$$x = R \cos(f - M) - a ; \quad y = R \sin(f - M) \quad (189)$$

mit

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{und} \quad r^2 = x^2 + y^2 ,$$

wobei r den Abstand vom Gyrozentrum zum Teilchen mißt.

Mit Hilfe der Reihe (184) $f - M \approx 2e \sin M$ werden Argumente der Winkelfunktion umgeschrieben und die Sinusfunktion wird entwickelt, so dass man erhält:

$$\sin(f - M) \approx \sin(2e \sin M) \approx 2e \sin M \Rightarrow y \approx 2ae \sin M \quad . \quad (190)$$

Für die x -Koordinate erhalten wir mit $\cos(f - M) \approx 1$ und $R \approx a(1 - e \cos f) \approx a(1 - e \cos M)$ schließlich

$$x = -ae \cos M \quad . \quad (191)$$

Mit den Relationen (190) und (191) kann man sofort die Bahn der Epizykenbewegung formulieren

$$\frac{x^2}{(ea)^2} + \frac{y^2}{(2ea)^2} = 1 \quad (192)$$

was eine Ellipse mit der großen Halbachse ($2ae$) in Orbitbewegung und der kleinen Halbachse (ae) in radialer Richtung beschreibt.

Also – in linearer Näherung bzgl. der Exzentrizität e umschreiben die Abweichungen der Bahnkurve von der Kreisbahn eine Epizykenellipse, die in einer Orbitperiode durchlaufen wird.

Orbitvektoren:

Die Bewegung des Zwei-Körper-Problems kann auch mit Hilfe zweier Vektoren vollständig charakterisiert werden: dem *Drehimpuls* (119) und dem *Runge-Lenz-Vektor* – letzterer wird in diesem Abschnitt definiert. Dafür wird die Darstellung des Ortsvektors und seiner Zeitableitung mittels Orbitvektoren $\vec{A} = a \vec{e}_a$ und $\vec{B} = b \vec{e}_b$ verwendet. Beide weisen entlang der Hauptachsen ($\vec{e}_a; \vec{e}_b$) der Ellipse und lauten mit den Relationen (158) und (157):

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{A} (\cos \tilde{E} - e) + \vec{B} \sin \tilde{E} \quad (193) \\ \text{mit } |\vec{r}| &= a (1 - e \cos \tilde{E}) \\ \text{und } \vec{A} &= ae \vec{e}_x, \vec{B} = be \vec{e}_y = a\sqrt{1 - e^2} \vec{e}_y \quad . \end{aligned}$$

Differenziert man den Ortsvektor (193) \Rightarrow Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}} = \left(-\vec{A} \sin \tilde{E} + \vec{B} \cos \tilde{E} \right) \frac{d\tilde{E}}{dt} \quad . \quad (194)$$

Differenziert man die Keplergleichung (147), ergibt sich $n dt = (1 - e \cos \tilde{E}) d\tilde{E}$ womit man schreiben kann $\dot{\tilde{E}} = n(1 - e \cos \tilde{E})^{-1}$, womit für die Geschwindigkeit geschrieben werden kann:

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{\left(-\vec{A} \sin \tilde{E} + \vec{B} \cos \tilde{E} \right) n}{\left(1 - e \cos \tilde{E} \right)} \quad (195)$$

Damit lässt sich der Drehimpuls neu umschreiben als

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \left[\vec{A} (\cos \tilde{E} - e) + \vec{B} \sin \tilde{E} \right] \times \left[\frac{\vec{B} \cos \tilde{E} - \vec{A} \sin \tilde{E}}{1 - e \cos \tilde{E}} \right] n \\ &= \frac{\vec{A} \times \vec{B} (1 - e \cos \tilde{E})}{1 - e \cos \tilde{E}} = n \vec{A} \times \vec{B}\end{aligned}\quad (196)$$

Im Folgenden stellen wir die Formulierung des Bahndrehimpulses (129) aus den geometrischen Zusammenhängen aus der Lösung des *Zweikörperproblems* und der eben gegebenen Darstellung einer Ellipse mittels der Orbitvektoren gegenüber. Erstere lautet

$$|\vec{L}| = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$$

Als nächstes führen wir den Runge-Lenz-Vektor ein

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) - \frac{\vec{r}}{r} . \quad (197)$$

Dessen Bedeutung machen wir anhand einiger Umformungen klar. Mit dem Entwicklungssatz ergibt sich

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left\{ \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \right\} - \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{r} \dot{\vec{r}}^2 - \dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \right\} - \frac{\vec{r}}{r} .$$

Eine geometrische Interpretation wird klar, wenn man die Ausdrücke für Ortsvektor $r(f)$, Geschwindigkeit \dot{r} , Drehimpuls $L^2 = \mu a (1 - e^2)$ und die Energie $E = \dot{r}^2/2 + 2L^2/2r^2 - \mu/r$, die aus der Lösung des *Zweikörper-Problems* folgen, bemüht:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \vec{e}_r ; \quad \dot{\vec{r}} = r n \vec{e}_\varphi + \dot{r} \vec{e}_r ; \quad \vec{L} = r^2 n \vec{e}_z \\ \implies \vec{e} &= \frac{r^3 n^2 \vec{e}_r}{\mu} - \frac{\dot{r} r^2 n \vec{e}_\varphi}{\mu} - \vec{e}_r = \frac{L^2 \vec{e}_r}{\mu r} - \frac{\dot{r} r^2 n \vec{e}_\varphi}{\mu r} - \vec{e}_r \\ &= \left(\frac{L^2}{\mu r} - 1 \right) \vec{e}_r - \frac{\dot{r} r^2 n}{\mu} \vec{e}_\varphi .\end{aligned}\quad (198)$$

Quadriert man den Runge-Lenz Vektor (198), erhält man

$$e^2 = 1 + \frac{2L^2 E}{\mu^2} \quad (199)$$

was exakt der Gl. (127) entspricht - nur nach e^2 umgestellt. Die Größe e ist also hier wieder die Exzentrizität und der Vektor $\vec{e} = e \vec{e}_a$ mit diesem Betrag zeigt vom Brennpunkt (o. Zentrum) des Kegelschnitts in Richtung Perizentrum! Außerdem ergeben einige Umformungen mit Gln. (195) u. (196) für den Runge-Lenz Vektor (197) genau dasselbe:

$$\vec{e} = \frac{\left[-\vec{A} \sin \tilde{E} + \vec{B} \cos \tilde{E} \right] \times n^2 \left[\vec{A} \times \vec{B} \right]}{\mu (1 - e \cos \tilde{E})} - \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2 \left[-\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \sin \tilde{E} + \vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \cos \tilde{E} \right]}{\mu (1 - e \cos \tilde{E})} - \frac{\vec{A} (\cos \tilde{E} - e) + \vec{B} \sin \tilde{E}}{a (1 - e \cos \tilde{E})} \\
&= \frac{n^2 \left[a^2 \vec{B} \sin \tilde{E} + b^2 \vec{A} \cos \tilde{E} \right]}{\mu (1 - e \cos \tilde{E})} - \frac{\vec{A} (\cos \tilde{E} - e) + \vec{B} \sin \tilde{E}}{a (1 - e \cos \tilde{E})} \\
&\stackrel{\mu = n^2 a^3}{=} \frac{\vec{B} \sin \tilde{E} + (1 - e^2) \vec{A} \cos \tilde{E} - \vec{A} (\cos \tilde{E} - e) - \vec{B} \sin \tilde{E}}{a (1 - e \cos \tilde{E})} \\
&= \frac{\vec{A} (e - e^2 \cos \tilde{E})}{a (1 - e \cos \tilde{E})} = \frac{e}{a} \vec{A} = e \vec{e}_a \tag{200}
\end{aligned}$$

Mit diesem Ausdruck wird wieder klar, dass es sich bei dem Vektor \vec{e} um ein weiteres Integral der Bewegung handeln muss, denn e ist konstant und der Vektor \vec{e}_a kann sich auch nicht ändern, denn es handelt sich um die Hauptachsenrichtung der Ellipse, die ebenfalls fix ist.

Mit dem bisher Erarbeiteten ist es möglich, einen Orbit vollständig mit den Orbitvektoren zu beschreiben – und es ergibt sich für das ungestörte Keplerproblem:

$$\boxed{\vec{L} = n \vec{A} \times \vec{B}, \quad \vec{e} = e \frac{\vec{A}}{a}} \tag{201}$$

Der Runge-Lenz-Vektor zeigt die Position des Perizentrums auf der Bahnebene an, die Richtung des Drehimpulses $\vec{L} \propto \vec{A} \times \vec{B}$ legt die Lage dieser Ebene im Raum fest – und die Beträge der Orbit-Vektoren charakterisieren den Typ der Kegelschnitt-Bahn (Ellipse, Hyperbel, Parabel) vollständig!

4.1.3 Die dreidimensionalen Orbitelemente

Wenn Störungen eine Rolle spielen, dann ist es wichtig, sich auf ein festes Bezugssystem zu beziehen.

Im ungestörten Fall des *Zweikörperproblems* müssen immer die Beziehungen gelten

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{e}} = \vec{e} \cdot \dot{\vec{L}} = 0, \tag{202}$$

was sicher stellt, dass sich die Orbitvektoren als Integrale der Bewegung nicht ändern dürfen und dass der Drehimpuls \vec{L} senkrecht auf der Bahnebene steht.

Im 3D-Ortsraum können \vec{e} und \vec{L} dann wie folgt dargestellt werden. Man projiziert \vec{L} auf die x-y-Ebene, wobei Ω die Länge des aufsteigenden Knotens ist.

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= L \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix} \\
\vec{e}_Q &= \cos \Omega \vec{e}_x + \sin \Omega \vec{e}_y = \frac{\vec{e}_Q \times \vec{L}}{|\vec{e}_Q \times \vec{L}|} \quad \text{Richtung des aufsteigenden Knotens}
\end{aligned}$$

$$\cos i = \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{L}}{L} \quad \text{Inklination}$$

$$\cos \omega = \frac{\vec{e} \cdot \vec{e}_Q}{e} \quad \text{Perizentrum}$$

Damit ist mit (201) und den daraus abzuleitenden Bahnelementen $a, e, i, \tilde{\omega} = \Omega + \omega, \Omega$ und t_0 vollständig bekannt.

- a - große Halbachse (Energie)
- e - Exzentrizität (Drehimpuls)
- i - Inklination (z-Komponente von \vec{L})
- ω - Länge zum Perizentrum
- Ω - Knotenlänge (Lage von \vec{L} in \vec{e}_x und \vec{e}_y)

Abbildung 6: Lage der dreidimensionalen Orbitalelemente

4.2 Gestörtes ZKP

In der Störungstheorie des Kepler-Problems geht man von folgender Gleichung aus:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} - \nabla\Phi'(\vec{r}) \\ &= -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{F}_p \ ,\end{aligned}\tag{203}$$

mit dem Störpotenzial Φ' .

Zur Lösung dieser Gleichung bedient man sich der Variation der Konstanten. Hierbei sind die Konstanten $\vec{c} = \{a, e, \tilde{\omega}, i, \Omega, t_0\}$, die Konstanten des Zwei-Körper-Problems. Für $\vec{F} \rightarrow 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(c_1, \dots, c_6, t) = \vec{r}(\vec{c}, t) \\ \dot{\vec{r}} &= \vec{v}(\vec{c}, t) = \\ &= \vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \left[\frac{\partial x_i}{\partial c_j} \vec{e}_i \vec{e}_j \right] \cdot \frac{\partial c_k}{\partial t} \vec{e}_k \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \vec{e}_i \\ \implies \ddot{\vec{r}} &= \dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{c}} \\ &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{c}} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Als einschränkende Bedingung setzt man nun

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = 0\tag{204}$$

vereinfachen sich die Geschwindigkeit und Beschleunigung zu

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\tag{205}$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{c}}\tag{206}$$

womit man für die gestörte Keplergleichung gewinnt:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = -\nabla\Phi'(\vec{r}) \ .\tag{207}$$

Was kann man nun über die Einschränkung (204) aussagen? Es ist das Skalarprodukt aus der Änderung des Ortsvektors \vec{r} durch die Parameteränderungen \vec{c} mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{c}}$ der Parameteränderungen im 6D-Parameterraum. Ein Senkrechtstehen kann z.B. dieses Verschwinden verursachen oder auch die Tatsache,

dass es sich jeweils um kleine Größen handelt. Die Bedingung bedeutet, dass die Entwicklung um einen festen Punkt \vec{r} vorgenommen wird, der auch bei einer zeitlichen Änderung der Parameter \vec{c} festgehalten wird.

Die ersten beiden Summanden in Gl. (207) ergeben sich zu Null mit der Annahme, daß die Bahn bei einem fixen t noch gut als Kegelschnitt beschrieben werden kann. Die Störungsgleichungen lauten damit zusammengefasst:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = -\nabla \Phi'(\vec{r}) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \text{mit } \vec{c} = \{a, e, i, \tilde{\omega}, \Omega, t_0\} \quad (208)$$

Dieses Gleichungssystem gilt es nun zu lösen, wobei angenommen wird, dass sich $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{c}}$ und $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}}$ aus den ungestörten Keplerlösung ergeben. Zunächst werden folgende Umformungen vorgenommen

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{c}} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial \vec{r}} \end{array} \quad \left| \cdot \begin{array}{l} \left(-\frac{\partial \vec{v}}{\partial c_i}\right) \\ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_i}\right) \end{array} \right.$$

und beide Gleichungen werden anschließend addiert, so dass für die rechte Seite geschrieben werden kann.

$$-\frac{\partial \Phi'}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_i} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial c_i} \quad .$$

Somit wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{c}} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_i} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \frac{\partial \vec{v}}{\partial c_i} &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial c_i} \\ \text{mit } \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{c}} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} &= \frac{\partial x_i}{\partial c_i} \frac{\partial c_j}{\partial t} \vec{e}_i \quad (\text{Einsteinsche Summe}) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{pmatrix} [c_1, c_1] & \cdots & [c_1, c_6] \\ \vdots & & \vdots \\ [c_6, c_1] & \cdots & [c_6, c_6] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial c_6}{\partial t} \end{pmatrix} = \hat{C} \dot{\vec{c}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial c_6} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \vec{c}} \quad . \quad (209)$$

Für die Lagrange-Klammern gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} [c_i, c_j] &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial c_i} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial c_j} - \frac{\partial x_k}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial c_i} \right) \\ [c_i, c_i] &= 0 \quad , \quad [c_i, c_j] = -[c_j, c_i] \end{aligned} \quad (210)$$

Damit vereinfacht sich die obige Matrix, da statt 36 nur noch 15 Koeffizienten ungleich sind. Desweiteren kann auch gezeigt werden, daß die Lagrange-Klammern zeitunabhängig sind:

$$\frac{\partial}{\partial t} [c_i, c_j] = 0 \quad .$$

Damit gewinnen wir folgendes Gleichungssystem für Änderung der Bahnparameter infolge konservativer Störungen

$$\dot{\vec{c}} = \hat{C}^{-1} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \vec{c}} \quad (211)$$

wobei die *Kunst* in der Berechnung der Störungsfunktion \mathcal{R} (eine in der Himmelsmechanik geläufige Größe für das Störpotential: $\Phi' = -\mathcal{R}$) in Abhängigkeit der Bahnparameter \vec{c} besteht – sowie in der Bestimmung der Lagrange-Klammern. Die Berechnung beider ist Gegenstand der nachfolgenden Abschnitte. Wir beginnen mit den

4.2.1 Lagrange-Klammern

Kurz und knapp – wir müssen von einem Koordinatensystem in der Bahnebene

$$x = r \cos f \quad \text{und} \quad y = r \sin f \quad (212)$$

in ein allgemeines inertiales (3D) Koordinatensystem $\{X, Y, Z\}$ wechseln, für welches wir uns der Relationen (80)-(84) aus den Koordinatentransformationen erinnern. Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r(a, e, M) \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos \iota \\ \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos \iota \\ \sin(\omega + f) \sin \iota \end{pmatrix} \quad (213)$$

aus denen wir über $\vec{r} = X_i \vec{e}_i$ und $\vec{v} = \dot{X}_i \vec{e}_i$ (Einstein-Summen) die Koeffizienten (210) dann bestimmen können.

4.2.2 Störungsfunktion

Ein Beispiel ist uns schon begegnet: das Störpotential, welches ein abgeplatteter Zentralkörper hervorruft:

$$\mathcal{R} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{R_p}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \quad (214)$$

Die Terme die r^{-2n} enthalten, lassen sich mit den uns schon bekannten elliptischen Entwicklungen (179) und (180) in Abhängigkeit von M darstellen und außerdem beachte man, dass simpel gilt $\cos \theta = \sin \iota$.

Ein weiteres sehr wichtiges Beispiel ist die Störungen durch eine dritte (kleine oder weit entfernte) Punktmasse m' am Ort \vec{r}' :

$$\mathcal{R} = \frac{\gamma m'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \gamma m' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r'^3} \quad (215)$$

Diese Funktion in den Bahnparametern der Teilchen (\vec{c} und \vec{c}') auszudrücken, ist schon erheblich schwerer und man muss spezielle Funktionen bemühen, nämlich die Legendre Polynome deren Erzeugende gerade die in Gl. (215) auftauchende Funktion

$$\frac{1}{|\vec{r}'' - \vec{r}'|} = \frac{1}{r'} \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \frac{r}{r'} \cos \Theta \right] \quad (216)$$

ist. Der Winkel Θ wird von den beiden Vektoren \vec{r}' und \vec{r}'' gebildet und läßt sich damit leider nicht so simpel in \vec{c} ausdrücken wie im Falle der Abplattung eines Zentralkörpers. Im Allgemeinen liegt der Störkörper außerhalb der Bahnebene der beiden Primärkörper und dann wird die Entwicklung der Funktion hinreichend technisch. Ein ausführliches Beispiel ist bei *Murray und Dermott* zu finden, welches den einfacheren Fall der planaren Bewegung von M , m und m' behandelt. Das Grundprinzip bleibt aber auch hier erhalten – man bestimme Θ aus der Geometrie der Bewegung (z.B. planare Bewegung: $\Theta = (f' + \tilde{\omega}') - (f + \tilde{\omega})$), formuliere damit $\cos \Theta$, bemühe Additionstheoreme und dann die z.B. die elliptischen Entwicklungen (179) - (184).

4.2.3 Lagranges-Störungsgleichungen

Mit der Kenntnis der Störungsfunktion, der allgemeinen Störungsgleichung (211) und noch einigen weiteren (von Lagrange) eingeführten Definitionen

$$\lambda = M + \tilde{\omega} = n(t - t_0) + \tilde{\omega} = nt + \epsilon \quad (217)$$

wobei λ die mittlere Länge, M die mittlere Anomalie, $\tilde{\omega}$ die Länge des Perizentrums und ϵ die mittlere Länge der Epoche bezeichnen. Die Zeit der Perizentrenpassage ist t_0 .

Damit lauten Lagranges'-Gleichungen

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} \quad (218)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{nea^2} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{nea^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}} \quad (219)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{nea^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (220)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (221)$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nea^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (222)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\tan i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}} \right) - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \quad (223)$$

4.2.4 Störungsgleichungen und Orbitvektoren

Eine allgemeinere Möglichkeit die Ableitungen $\partial_t \vec{c}$ erreicht man Zuhilfenahme der Orbitvektoren aus (193), (195)

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 &= \frac{e_0}{a_0} \vec{A}_0, \quad \vec{L}_0 = \Omega_0 \vec{A}_0 \times \vec{B}_0 \\ \dot{\vec{L}}_0 &= 0 \quad ; \quad \dot{\vec{e}}_0 = 0 \\ &\implies \text{Kepler-Grundlösung}\end{aligned}$$

und einer geeigneten Darstellung der Störkraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = R \vec{e}_r + T \vec{e}_T + N \vec{e}_L \quad . \quad (224)$$

Der allgemeinere Charakter der nun vorzustellenden Methode besteht darin, dass wir nicht mehr an *konserervative* Kräfte gebunden sind. D.h. nun können beliebige Störung – auch dissipativen Charakters – behandelt werden. Die Beziehungen zwischen den Einheitsvektoren, die im Spiel sind, lauten

$$\vec{e}_L = \frac{\vec{L}}{L} \quad ; \quad \vec{e}_T = \frac{\vec{L} \times \vec{r}}{rL} = \vec{e}_L \times \vec{e}_r \quad (225)$$

$$\vec{e}_r = \cos f \vec{e}_a + \sin f \vec{e}_b \quad ; \quad \vec{e}_T = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial f} \quad ; \quad \vec{e}_L = \vec{e}_r \times \vec{e}_T \quad (226)$$

$$\vec{e}_a = \cos \omega \vec{e}_Q + \sin \omega \vec{e}_\perp \quad ; \quad \vec{e}_b = \frac{\partial \vec{e}_a}{\partial \omega} \quad ; \quad \vec{e}_\perp = \vec{e}_L \times \vec{e}_Q \quad . \quad (227)$$

Die mathematische Formulierung eines Keplerorbits ist durch den Runge-Lenz-Vektor und der Drehimpulsdefinition gegeben. Deren Änderung wird durch die Störung hervorgerufen, so dass die zeitliche Differentiation derselben zu den gesuchten Änderungen führt. Unter Benutzung von Gl. (203) erhält man durch Differenziation:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \left(-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{F} \right) = \vec{r} \times \vec{F} \\ \dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\mu a (1 - e^2)} \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\mu a (1 - e^2)} \vec{e}_L \right) \\ \implies \vec{r} \times \vec{F} &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\mu a (1 - e^2)} \vec{e}_L \right)\end{aligned} \quad (228)$$

Für den Runge-Lenz-Vektor ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}\mu \dot{\vec{e}} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} \right) - \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\vec{r}}{r} \right) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} - \mu \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \mu \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} \\ &= \left(-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{F} \right) \times \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} - \mu \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \mu \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \left(\vec{r} \left(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right) - \dot{r} r^2 \right) + \vec{F} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} - \mu \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \mu \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}\dot{r}r + \frac{\mu}{r} \dot{\vec{r}} - \mu \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{F} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) + \mu \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} \\ \dot{\vec{e}}_a + e \dot{\vec{e}}_a &= \mu^{-1} \vec{F} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}}\end{aligned} \quad (229)$$

Die Änderung der Bahn ist also mit den Gln. (228) und (229) beschrieben. Versucht man nun die Störungen mit den Veränderungen der Konstanten des Zwei-Körper-Problems zu beschreiben, so bildet man deren totalen Ableitung auf den linken Seiten der Gleichungen (228) - (229) und erhält die gesuchten Größen $\frac{\partial a}{\partial t}$, $\frac{\partial e}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ und $\frac{\partial i}{\partial t}$.

Energie & Drehimpuls

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\text{wobei } \vec{F} = R\vec{e}_r + T\vec{e}_T + N\vec{e}_N \text{ mit } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{L}}{L} \times \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_L \times \vec{e}_r, \quad \vec{e}_N = \frac{\vec{L}}{L}$$

Mit $R = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, $T = \frac{\vec{F} \cdot (\vec{L} \times \vec{r})}{rL}$ und $N = \vec{F} \cdot \frac{\vec{L}}{L}$ ergibt sich dann:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{r} v_r + \frac{\vec{F} \cdot (\vec{L} \times \vec{r})}{rL} v_T$$

Für den ungestörten Fall bleibt eine ebene Bewegung:

$$\dot{\vec{r}} = v_R \vec{e}_r + v_T \vec{e}_T \quad (230)$$

Für $E = -\mu/2a$ folgt $\frac{dE}{dt} = \frac{\mu}{2a^2} \dot{a} = Rv_R + Tv_T$ und damit:

$$\boxed{\frac{\mu}{2a^2} \dot{a} = \dot{r}R + r\dot{\varphi}T} \quad (231)$$

Setzt man nun für den Radius r die bekannten Formeln ein, so ergeben sich zunächst folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e \cos f} \\ \dot{r} &= \frac{ep \sin f}{(1 + e \cos f)^2} \dot{\varphi} = e \sin f \frac{L^2}{\mu(1 + e \cos f)^2} \dot{\varphi} \\ &\stackrel{(119)}{=} e \sin f \frac{p}{(1 + e \cos f)^2} \frac{L}{r^2} \end{aligned}$$

$$\dot{r} = \frac{L}{p} e \sin f \quad \text{tangentielle Geschwindigkeit} \quad (232)$$

Durch Einsetzen ergeben sich die Gaußgleichungen, die die Änderungen der einzelnen Orbitalelemente beschreiben.

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} [(e \sin f) R + T (1 + e \cos f)] \\ \dot{e} &= \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} [R \sin f + T(\cos \tilde{E} + \cos f)] \\ \dot{\omega} &= \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \left(\frac{1}{e}\right) \left[-R \cos f + T \sin f \left(\frac{2+e \cos f}{1+e \cos f}\right)\right] - \dot{\Omega} \cos i \\ \frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \frac{N \cos \varphi}{1+e \cos f} \\ \dot{\Omega} &= \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \frac{N \sin \varphi}{\sin i(1+e \cos f)} \end{aligned}$$

(233)

5 Das Drei-Körper-Problem

Das Drei-Körper-Problem (DKP) beschreibt die Bewegung dreier Körper unter der Wirkung ihrer wechselseitigen Gravitation. Im Schwerpunktsystem, $\sum m_i \vec{r}_i = 0$, lauten die Bewegungsgleichungen:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j,j \neq i} \gamma \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad i = 1, 2, 3 \quad (234)$$

The diagram shows a 3D coordinate system. The vertical axis is labeled \vec{r}_3 . The horizontal axis to the left is labeled \vec{r}_1 , and the horizontal axis to the right is labeled \vec{r}_2 . A unit vector \vec{e}_x is shown pointing to the right, parallel to the \vec{r}_2 axis.

Im Allgemeinen ist dieses Problem nicht geschlossen lösbar – einschränkende Vereinfachungen sind nötig, um unter bestimmten Bedingungen analytische Ausdrücke für Lösungen zu gewinnen.

5.1 Eingeschränktes DKP

Für die Einschränkung des DKP werden die Annahmen $m_1 = M$ und $m_2 = m \gg m_3$ gemacht. Damit sind für die Gleichgewichtsbetrachtungen nur die Primärkörper zu berücksichtigen – m.a.W. die Bewegung der Primärkörper, M und m , wird nicht von der kleinen Masse m_3 beeinflusst, d.h. für deren Bewegung bemühen wir das Zweikörperproblem. Außerdem gelte für die Primärkörper $M \gg m$. Aus dem Kepler-Problem kennen wir die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\gamma \frac{m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \gamma \frac{m_3}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_3) \quad (235)$$

$$= -\gamma \left(\frac{m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + O\left(\frac{m_3}{m_i}\right) \right) . \quad (236)$$

Mit der Relativkoordinate $\vec{D} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und der Betrachtung der Primärkörper $i = 1, 2$ ergeben sich die Bewegungsbahnen zu Keplerkegelschnitten, die als Lösungen der Gleichungen

$$\ddot{\vec{D}} = -\gamma(M + m) \frac{\vec{D}}{D^3} = -\mu \frac{\vec{D}}{D^3} . \quad (237)$$

uns schon geläufig sind:

$$D = \frac{a_p(1 - e_p^2)}{1 + e_p \cos f} \quad , \quad (238)$$

wobei mit dem Index p die (elliptischen) Orbitalelemente der Primärkörper sind. Die Bewegung des 3. Körpers im Gravitationsfeld der Primärkörper kann in einem, mit dem Sekundärkörper m mitrotierenden Koordinatensystem allgemein geschrieben werden.

$$\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\nabla\Phi_G \quad . \quad (239)$$

Wir wählen Normierungen für die mittlere Bewegung n und die große Halbachse der Primaärkörper

$$a_p^3 \bar{n}^2 = \gamma(M + m) = \gamma M(1 + \mu_*) = \mu = 1 \quad ; \quad a_p = n = 1 \quad , \quad (240)$$

wo mit der Definition $\mu_* = m/M$ unmittelbar folgt:

$\gamma M = 1/(1 + \mu_*)$; $\gamma m = \gamma \mu_* M = \mu_*/(1 + \mu_*)$. Damit lassen sich die Potentiale schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi_G &= -\gamma \left(\frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{m}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) = \frac{-1}{(1 + \mu_*)} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{\mu_*}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) \\ &= -\frac{r_2^*}{\vec{r} - \vec{r}_1} - \frac{r_1^*}{\vec{r} - \vec{r}_2} \quad . \end{aligned} \quad (241)$$

Hier haben wir die Massen-Parameter $r_1^* = \mu_*/(1 + \mu_*)$ und $r_2^* = 1/(1 + \mu_*)$, die zugleich die auf den Abstand beider Primärkörper normierten Abstände derselben vom Schwerpunkt sind. Folglich gilt:

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{e}_x = -\frac{\mu_*}{1 + \mu_*} D \vec{e}_x \quad ; \quad \vec{r}_2 = x_2 \vec{e}_x = \frac{1}{1 + \mu_*} D \vec{e}_x \quad (242)$$

$$x_2 - x_1 = D \quad \text{und} \quad r_1^* + r_2^* = 1 \quad . \quad (243)$$

Mit anderen Worten, die normierten Abstände ersetzen praktischer Weise die Gravitationsparameter $\gamma M \rightarrow r_2^*$ und $\gamma m \rightarrow r_1^*$ und alle Größen im DKP sind von der Ordnung $O(1)$ wenn die Normierungen (240) verwendet werden – m.a.W. man vermeidet astronomische Zahlen.

Im Folgenden wird das DKP auf das Zentrum des Zentralkörpers bezogen werden, da das aus Beobachtungen gut abschätzbar ist, wohingegen der Schwerpunkt schlecht zu bestimmt werden kann. Wir verschieben also den Ursprung des Koordinatensystems mit der Transformation

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{\mu_*}{1 + \mu_*} D \vec{e}_x = \vec{R} - r_1^* D \vec{e}_x \quad , \quad (244)$$

womit folgt:

$$\begin{aligned} -\nabla\Phi_G &= \ddot{\vec{R}} - r_1^* \ddot{D} \vec{e}_x + \dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{R} - r_1^* D \vec{e}_x) \\ &\quad + 2\vec{\Omega} \times (\dot{\vec{R}} - r_1^* \dot{D} \vec{e}_x) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (\vec{R} - r_1^* D \vec{e}_x)) \quad . \end{aligned} \quad (245)$$

Zunächst wollen wir in der Gleichung die Terme mit r_1^* ausdrücken, die immer in Verbindung mit \vec{D} auftreten, d. h. es handelt sich um Trägheitskraftterme der Zentralkörperbewegung $\vec{r}_1 = -r_1^* \vec{D}$

Wir beachten daher nochmal das Zweikörperproblem für \vec{D} , mit der Lösung (238) und deren Ableitung:

$$\dot{D} = e_p \sin f \frac{D^2}{L_p^2} \quad (246)$$

Nach dem Schwerpunktsatz gilt:

$$\begin{aligned} M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 &= Mr_1\vec{e}_x + mr_2\vec{e}_x = 0 \\ r_1 &= -\frac{m}{M}r_2 = -\mu_*r_2 \\ D = r_1 + r_2 &\implies r_1 = \frac{\mu_*D}{1 + \mu_*}, r_2 = \frac{D}{1 + \mu_*} \end{aligned}$$

Für eine mittlere Kreisbahn läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} a_p^{3/2} (1 - e \cos \tilde{E}) d\tilde{E} \\ \implies T &= 2\pi a_p^{3/2} = \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \quad (247)$$

Damit ergibt sich die Umlaufzeit der Primärkörper um ihren Schwerpunkt mit $T_p^2 \sim a_p^3$, das 3. Keplersche Gesetz.

Man kann die zusätzlichen Terme, die den Parameter r_1^* enthalten, d. h. die Trägheitskraft bzw. das korrespondierende Potenzial, wie folgt ausdrücken. Für den 3. Körper gilt :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{(1 + \mu_*)|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - \frac{\mu_*}{1 + \mu_*} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \quad (248)$$

Mit der Transformation $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1$ ergibt sich:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{1}{1 + \mu_*} \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\mu_*}{1 + \mu_*} \frac{\vec{R} + \vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{R} + \vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Mit $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -D\vec{e}_x$, $\vec{r}_1 = r_1 \vec{e}_x$, $r_1 = -\mu_*D/(1 + \mu_*)$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= -\frac{\mu_*}{1 + \mu_*} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\frac{\mu_*}{1 + \mu_*} \frac{\vec{D}}{D^3} \\ &= -\frac{d^2}{dt^2}(r_1^*D) = -r_1^* \frac{\vec{D}}{D^3} = -r_1^* \nabla [\Omega^2 (\vec{R} \cdot \vec{D})] \end{aligned}$$

und man erhält den Gradienten eines Potentials, welches Folge der Ursprungsverschiebung ist. Für die Bewegungsgleichung im Inertialsystem folgt damit

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -\frac{r_2^*}{\mu_*} \frac{\vec{R}}{R^3} - r_1^* \left(\frac{\vec{R} - \vec{D}}{|\vec{R} - \vec{D}|^3} - \frac{\vec{D}}{D^3} \right) \quad (249)$$

Abbildung 7:

Der zusätzliche Term ist durch die Verschiebung des Bezugssystems entstanden und drückt die Bewegung der Primärkörper um den Schwerpunkt aus. Diese Darstellung über \vec{R} und \vec{D} hat den Vorteil, daß der Abstand zwischen den Primärkörpern bestimmbar ist, während der Abstand zum Massenmittelpunkt eher theoretischer Natur ist.

Für die allgemeine Darstellung im mitrotierenden System ergibt sich:

$$\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\nabla\Phi'_G \quad (250)$$

mit dem effektiven Potenzial

$$\Phi'_G = -\frac{r_2^*}{|\vec{R}|} - r_1^* \left[\frac{1}{|\vec{R} - \vec{D}|} + \Omega^2(D) (\vec{R} \cdot \vec{D}) \right] . \quad (251)$$

Schränkt man das DKP noch weiter ein, indem man den Primärkörpern eine Kreisbahn $\dot{\vec{\Omega}} = 0$, $\vec{\Omega} = \vec{e}_z$ zuweist und die Abstände wie gehabt normiert $D = 1$; $\vec{D} = \vec{D} = 0$; $\Omega = 1$, dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\vec{R}} + 2\vec{e}_z \times \dot{\vec{R}} + \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times (\vec{R} - r_1^* \vec{e}_x)) = -\nabla\Phi_G \quad (252)$$

Wird dies nach dem Entwicklungssatz ausformuliert und für jede Komponente separat geschrieben, so ergeben sich die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} + 2\vec{e}_z \times \dot{\vec{R}} + z\vec{e}_z - \vec{R} + r_1^* \vec{e}_x &= -\nabla\Phi_G \\ \implies \ddot{x} - 2\dot{y} - (x - r_1^*) &= -\partial_x\Phi_G \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\partial_y\Phi_G \\ \ddot{z} &= -\partial_z\Phi_G \end{aligned}$$

Jacobi-Integral

Multipliziert man die Gleichungen jeweils mit \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} und addiert diese danach, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{x} - 2\dot{y}\dot{x} - (x - r_1^*)\dot{x} &= -\dot{x}\partial_x\Phi_G \\ \dot{y}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{y} - y\dot{y} &= -\dot{y}\partial_y\Phi_G \\ \ddot{z}\dot{z} &= -\dot{z}\partial_z\Phi_G \\ \implies \ddot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} - (x - r_1^*)\dot{x} - y\dot{y} &= -\frac{d\Phi_G}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} - \frac{(x - r_1^*)^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) + \frac{d\Phi_G}{dt} = 0 ,$$

womit man unmittelbar man das Jakobi-Integral erhält:

$$\boxed{\frac{v^2}{2} - \frac{(x - r_1^*)^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \Phi_G = \mathcal{C} \quad \text{Jakobi-Integral}} \quad (253)$$

Gleichung (253) entspricht der Summe von kinetischer Energie und effektivem Potential. Das effektive Potential ist die Summe aus dem potentiellen und dem zentrifugalem Anteil und beinhaltet Aussagen über die Fixpunkte eines Systems.

Achtung: Allerdings ist das Jakobi-Integral nicht mit der Erhaltung der Energie identisch.

Beispiel:

Ändert sich die Halbachse des Testkörpers – und das ist im eingeschränkten DKP immer möglich – so ändert sich auch seine Bahnenergie (bezogen auf das Keplerproblem) gemäß $E \sim -\frac{\mu^*}{2a}$. Die Eigenschaft des eingeschränkten DKP's wird bei einem Swing-by einer Raumsonde an einem Planeten („gravity assist“, meist am Jupiter) durchgeführt bei denen sogar geschlossene Ellipsen ($E < 0$ in Hyperbeln ($E > 0$) übergehen können — so exerziert bei den *Voyager*-Raumsonden.

Die „fehlende“ Energie wird dem Swing-by Planeten in diesem Fall entzogen.

Fazit: \mathcal{C} ist keine echte Teilchenenergie!!

$$\frac{v^2}{2} + \Phi_{eff} = \mathcal{C} \quad (254)$$

mit dem Dreikörper-Effektivpotenzial

$$\Phi_{eff} = -\frac{(x - r_1)^2 + y^2}{2} - \frac{r_2}{|\vec{R}|} - \frac{r_1}{|\vec{S}|} \quad (255)$$

mit dem Abstand Teilchen-Sekundärkörper $\vec{S} = \vec{R} - \vec{D} = \vec{R} - \vec{e}_x$ und der Normierung $n = r_1 + r_2 = 1$.

5.1.1 Lagrange-Punkte

Lagrange-Punkte sind Fixpunkte des Systems – auch stationäre oder Librationspunkte genannt. Sie sind durch folgende Bedingungen definiert:

$$\boxed{\vec{v} = 0 \iff \dot{x}_i = 0, \partial_{x_i} \Phi_{eff} = 0} \quad (256)$$

Weiterhin verschwindet in diesen Punkten jede weitere höhere Ableitung - wie man leicht in einer **Übung** nachvollziehen kann. Die Körper verharren dort unendlich lange. Für das ZKP erhielt man für das Effektiv-Potential:

$$\Phi_{eff} = -\frac{(x - r_1)^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{r_2}{R} - \frac{r_1}{S} \quad (257)$$

Abbildung 8:

Aus geometrischen Überlegungen folgt:

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ S^2 &= (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Aus den Bewegungsgleichungen ergeben sich die Einzelkomponenten:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\partial_x \Phi_{eff} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\partial_y \Phi_{eff} \\ \ddot{z} &= -\partial_z \Phi_{eff} \end{aligned}$$

Wendet man nun (256) auf obige Gleichungen an, so folgt:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\partial_x \Phi_{eff} = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\partial_y \Phi_{eff} = 0 \\ \ddot{z} &= -\partial_z \Phi_{eff} = 0 \\ \implies \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} &= \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß alle höheren Ableitungen verschwinden.

$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{dt^3} - 2\ddot{y} &= \frac{d}{dt} (-\partial_x \Phi_{eff}) = -\dot{x} \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x^2} - \dot{y} \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial y \partial x} - \dot{z} \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \\ \implies \frac{d^3x}{dt^3} &= \frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d^3z}{dt^3} \end{aligned}$$

Es bleiben zu bestimmen:

$$\begin{aligned} -\partial_x \Phi_{eff} &= 0 \\ -\partial_y \Phi_{eff} &= 0 \\ -\partial_z \Phi_{eff} &= 0 \end{aligned} \quad (258)$$

womit die Lagekoordinaten der Lagrange-Punkte ermittelt werden. Die Ableitungen lauten im Einzelnen:

$$\partial_x \Phi_{eff} = -(x - r_1) + r_2 \frac{x}{R^3} + r_1 \frac{x-1}{S^3} = 0 \quad (259)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \Phi_{eff} &= -y + y \frac{r_2}{R^3} + y \frac{r_1}{S^3} = \\ &= -y \left(1 + \frac{r_2}{R^3} + \frac{r_1}{S^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (260)$$

$$\partial_z \Phi_{eff} = z \left(\frac{r_2}{R^3} + \frac{r_1}{S^3} \right) = 0 \quad (261)$$

Bei der Bestimmung der Nullstellen ergibt sich zunächst $z = 0$, was bedeutet, daß die Lagrange-Punkte in der Bahnebene der Primärkörper liegen müssen. Im Folgenden werden die verschiedenen Fixpunkte unterschieden – nämlich unterteilt in die *triangularen* Fixpunkte $y \neq 0$ und die *kolinearen* Lagrange-Punkte ($y = 0$).

Triangulare Lagrange-Punkte: \mathcal{L}_4 und \mathcal{L}_5

Für $y \neq 0$ muß das Verschwinden des Klammerterms gegeben sein.

$$1 - \frac{r_2}{R^3} - \frac{r_1}{S^3} = 0 \iff R = S = D = 1$$

Mit der Bedingung (262) ergeben sich die triangularen Fixpunkte bzw. die Lagrange-Punkte \mathcal{L}_4 und \mathcal{L}_5 .

Zur Berechnung der genauen Koordinaten dieser Punkte bedient man sich wiederum der geometrischen Beziehungen aus Abbildung (5.1.1) und der Symmetrie in der Ebene.

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ S^2 &= (x-1)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \implies x = \frac{1}{2}, y = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Für die Lagrange-Punkte \mathcal{L}_4 und \mathcal{L}_5 findet man also die Koordinaten:

$$\boxed{\mathcal{L}_{4/5} = (1/2, \pm\sqrt{3}/2, 0)} \quad (262)$$

Damit läßt sich der (Energie)-Wert der Jakobi-Konstante an den Lagrange-Punkten $\mathcal{L}_{4/5}$ nach Gl. (253) unter Benutzung der notwendigen Bedingung $\vec{v} = 0$ formulieren zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{4/5} \stackrel{\vec{v}=0}{=} \Phi_{eff} \stackrel{D=r_1+r_2=1}{=} & -\frac{(x-r_1)^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{r_1}{2} - \frac{r_1^2}{2} \\ & = -\frac{3}{2} + \frac{r_1}{2}(1-r_1) = -\frac{3}{2} + \frac{r_1 r_2}{2} \end{aligned}$$

Bevor wir weitere Aussagen über Stabilität der Punkte machen, wollen wir herausfinden, welcher Art diese Punkte auf der Fläche $\Phi_{eff}(x, y)$ sind – d.h. handelt es sich um Extrema oder z.B. Sattelpunkte. Um es vorweg zu nehmen, im Falle der triangularen Punkte $\mathcal{L}_{4/5}$ haben wir es mit Maxima zu tun – bei den kollinearen $\mathcal{L}_{1/2/3}$ handelt es sich um Sattelpunkte.

Die notwendige Bedingung für Extrema ist mit dem Verschwinden der 1. partiellen Ableitungen des Potentials gegeben. Des Weiteren muss die Hessesche Determinante positiv definite Werte annehmen. Zur Berechnung der Hesse-Determinante brauchen wir die höheren Ableitungen von Φ_{eff} , also:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x^2} = \Phi_{xx} &= -1 + \frac{r_2}{R^3} - \frac{3r_2 x^2}{R^5} + \frac{r_1}{S^3} - \frac{3r_1 (x-1)^2}{S^5} \\ \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial y^2} = \Phi_{yy} &= -1 + \frac{r_2}{R^3} - \frac{3r_2 y^2}{R^5} + \frac{r_1}{S^3} - \frac{3r_1 y^2}{S^5} \\ \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} = \Phi_{zz} &= \frac{r_2}{R^3} - \frac{3r_2 z^2}{R^5} + \frac{r_1}{S^3} - \frac{3r_1 z^2}{S^5} \\ \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x \partial y} = \Phi_{xy} &= -\frac{3r_2 xy}{R^5} - \frac{3r_1 y (x-1)}{S^5} = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial y \partial z} = \Phi_{yz} &= -3yz \left(\frac{r_2}{R^5} + \frac{r_1}{S^5} \right) = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z \partial x} = \Phi_{zx} &= -3 \frac{xzr_2}{R^5} - 3 \frac{z(x-1)r_1}{S^5} = \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x \partial z}\end{aligned}$$

Speziell ergibt sich durch Einsetzen für die Lagrange-Punkte \mathcal{L}_4 und \mathcal{L}_5 :

$$\Phi_{xx} = -\frac{3}{4}, \quad \Phi_{yy} = -\frac{9}{4}, \quad \Phi_{zz} = 1, \quad \Phi_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{4} (r_2 - r_1), \quad \Phi_{xz} = \Phi_{yz} = 0$$

(hier wurde der Index *eff* einfach der Kürze wegen weggelassen) womit sich für die Hessesche Determinante ergibt:

$$\begin{aligned}H_{\mathcal{L}_4/\mathcal{L}_5} &= \begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \pm \frac{3\sqrt{3}}{4} \Delta r \\ \pm \frac{3\sqrt{3}}{4} \Delta r & -\frac{9}{4} \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \Delta r \\ \sqrt{3} \Delta r & 3 \end{vmatrix} = \frac{27}{16} (1 - \Delta r^2) > 0 .\end{aligned}$$

Für \mathcal{L}_4 und \mathcal{L}_5 haben wir es mit Extrema des Potentials zu tun. Die 2. Ableitungen $\Phi_{xx} = -3/4 < 0$ bzw. $\Phi_{yy} = -9/4 < 0$ belegen, dass es sich um ein Maximum handelt.

Kollineare Lagrange-Punkte: $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ und \mathcal{L}_3

Für $y = 0$ erhalten wir dann mit den Gln. (258) die Koordinaten für die kollinearen Lagrange-Punkte $\mathcal{L}_{1/2/3}$:

$$\begin{aligned}-(x - r_1) + \frac{r_2}{x^2} + \frac{r_1}{(x-1)^2} &= 0 \\ \implies -(x - r_1)(x - 1)^2 x^2 + r_2(x - 1)^2 + r_1 x^2 &= 0\end{aligned}$$

Für $x > 1$ entwickeln wir linear die Koordinate x um die Lage des Sekundärkörpers, $x \approx 1 \pm h$ und es ergeben sich \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 :

$$\begin{aligned} x = 1 \pm h \implies & -(1 + h - r_1) + \frac{r_2}{(1 + h)^2} + \frac{r_1}{h^2} = 0 \\ & -1 - h + r_1 + r_2(1 - 2h \dots) + \frac{r_1}{h^2} = 0 \\ & -h^3 - 2r_2h^3 + r_1 = 0 \end{aligned}$$

Mit $r_2 \approx 1, r_1 = r_1^* \lll 1, r_2 = 1 - r_1$ erhalten wir aus der Entwicklung

$$\begin{aligned} \implies & 3h^3 = r_1 \\ \implies & h_{1/2} = \pm \sqrt[3]{\frac{r_1}{3}} + O(r_1^{2/3}) \quad . \end{aligned} \quad (263)$$

die Hill-Skale h – eine enorm wichtige Größe für das DKP. Sie beschreibt den Radius einer gedachten Sphäre um den kleinen Körper Sekundärkörper, welche die Einflußsphären der Primärkörper, Zentralgestirn (Stern/Planet) und Sekundärkörper (Planet/Mond/Moonlet) – separiert.

Für die Hill-Sphäre gilt im Planet-Satellit-System:

$$\begin{aligned} h &= a_S \sqrt[3]{\frac{m_S}{3(M_P + m_S)}} = a_S \sqrt[3]{\frac{r_1^*}{3}} \\ &= a \sqrt[3]{\frac{r_1}{3}} \end{aligned} \quad (264)$$

wobei die Masse des Planeten mit M_P und die des Satelliten mit m_S bezeichnet ist.

Für das System Erde-Sonne erhalten wir:

$$h_{\oplus} = 1 \text{AE} \sqrt[3]{\frac{M_{\oplus}}{3(M_{\odot} + M_{\oplus})}} \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{km} \quad ,$$

sprich die Hill-Sphäre der Erde ist 1,5 Millionen Kilometer groß. M.a.W. unser guter Mond liegt also mit einem Fünftel dieses Abstandes sehr gut innerhalb der Einflusssphäre unseres Heimatgestirns.

Ein weiterer Punkt \mathcal{L}_3 liegt jenseits des Primärkörpers. Dies ergibt sich mit $x_3 = -1 + \delta$ und $\delta \lll 1$:

$$\begin{aligned} -(-1 + \delta - r_1) - \frac{r_2}{(\delta - 1)^2} - \frac{r_1}{(\delta - 3)^2} &= 0 \\ 1 - \delta + r_1 - (1 + 2\delta \dots)r_2 - \frac{r_1}{4}(1 - \delta \dots) &= 0 \\ \implies \delta = \frac{7}{12}r_1, \delta \ll h = \sqrt[3]{\frac{r_1}{3}} \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt für die Lagrange-Punkte:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_{1/2} &= (1 \pm h + O(r_1^{2/3}), 0, 0) \\ \mathcal{L}_3 &= (-1 + \frac{7}{12}r_1, 0, 0) \\ \mathcal{L}_{4/5} &= (\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) \end{aligned}} \quad (265)$$

Die kollinearen Punkte sind Sattelpunkte und somit instabil, wie die Stabilitätsanalyse ergibt. Sie sind in nur einer Richtung stabil. Die triangulären Punkte hingegen sind stabil.

Abbildung 9: Die Anordnung der Lagrange-Punkte innerhalb eines Systems

5.1.2 Lineare Stabilität der Lagrange-Punkte

Zunächst wollen wir uns allgemein mit der Stabilität einer Lösung eines dynamischen Gleichungssystems für Zustandsgrößen $Z(t)$

$$\dot{\vec{Z}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{Z}, \vec{\mathcal{P}}) \quad (266)$$

mit einer (u.U. nichtlinearen) Vektorfunktion \mathcal{F} die auch noch von Parametern \mathcal{P} abhängen soll – in unserem Fall sind das die Masseparameter r_1 und r_2 . Linearisierung dieser Funktion um einen Fixpunkt \vec{Z}_0 liefert:

$$\dot{\vec{Z}} = \dot{\vec{\xi}} = \hat{\mathbf{J}} \cdot (\vec{Z} - \vec{Z}_0) = \hat{\mathbf{J}} \cdot \vec{\xi} \quad (267)$$

mit $\vec{\xi} = \vec{Z} - \vec{Z}_0$ und den Komponenten der Jacobi-Matrix:

$$J_{ij} = \left. \partial_{z_j} \mathcal{F}_i \right|_{\vec{Z}_0} . \quad (268)$$

Die Eigenwerte als Lösungen der Gleichung $(\hat{\mathbf{J}} - \lambda \hat{\mathbf{I}}) \cdot \vec{\xi} = 0$ bilden dann die Basis für die Konstruktion einer allgemeinen Lösung des linearisierten Problems (siehe unten).

Nun zum konkreten Problem der Stabilität der Lagrange-Punkte. Gegeben seien die Lagrange-Punkte $\mathcal{L}_i(x_0, y_0, z_0)$ mit $i = 1, \dots, 5$. Sie liegen alle in der Bewegungsebene der beteiligten Körper, so daß für das Bezugssystem $z = 0$ gilt. Entwickelt man die Koordinaten um den jeweiligen Lagrange-Punkt \mathcal{L}_i - und linearisiert schließlich das Problem, erhält man:

$$\begin{pmatrix} x = x_0 + \xi \\ y = y_0 + \eta \\ z = z_0 + \zeta \stackrel{z=0}{=} \zeta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \dot{x} = \dot{\xi} \\ \dot{y} = \dot{\eta} \\ \dot{z} = \dot{\zeta} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \ddot{x} = \ddot{\xi} \\ \ddot{y} = \ddot{\eta} \\ \ddot{z} = \ddot{\zeta} \end{pmatrix}$$

Abbildung 10: Lagrangepunkte im Gravitationspotential eines Planeten und eines Mondes

so ergeben sich die Störungsgleichungen nach den Bewegungsgleichungen aus (252).

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= -\partial_{\xi}\Phi \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= -\partial_{\eta}\Phi \\ \ddot{\zeta} &= -\partial_{\zeta}\Phi\end{aligned}} \quad (269)$$

Die Entwicklung des Potentials (Linearisierung) ergibt:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \Phi(x_0, y_0, z_0) + \sum_{i,j,k} \frac{1}{i!j!k!} \frac{\partial^{i+j+k}\Phi}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \Big|_0 (x-x_0)^i (y-y_0)^j z^k \\ &= \Phi(x_0, y_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_0 \xi + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \Big|_0 \xi^2 + \dots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \Big|_0 \xi\eta + \dots\end{aligned}$$

Da hier um die Lagrange-Punkte entwickelt wurde, verschwinden die ersten Ableitungen des Potentials.

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \Big|_0 \xi^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \Big|_0 \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \Big|_0 \zeta^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \Big|_0 \xi\eta + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} \Big|_0 \eta\zeta + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} \Big|_0 \xi\zeta\end{aligned}$$

Mit (269) folgt dann sofort für das linearisierte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + \Phi_{xx}^0 \xi + \Phi_{xy}^0 \eta + \Phi_{xz}^0 \zeta &= 0 \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + \Phi_{xy}^0 \xi + \Phi_{yy}^0 \eta + \Phi_{yz}^0 \zeta &= 0 \\ \ddot{\zeta} + \Phi_{xz}^0 \xi + \Phi_{yz}^0 \eta + \Phi_{zz}^0 \zeta &= 0\end{aligned}$$

Mit Einführung der Geschwindigkeitskomponenten erhält man ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, welches mit der Ermittlung der Eigenwerte zu

lösen ist. Insgesamt ergeben sich 6 Differentialgleichungen.

$$\dot{\xi} = u \quad (270)$$

$$\dot{\eta} = v \quad (271)$$

$$\dot{\zeta} = w \quad (272)$$

$$\dot{u} = 2v - \Phi_{xx}^0 \xi - \Phi_{xy}^0 \eta - \Phi_{xz}^0 \zeta \quad (273)$$

$$\dot{v} = -2u - \Phi_{xy}^0 \xi - \Phi_{yy}^0 \eta - \Phi_{yz}^0 \zeta \quad (274)$$

$$\dot{w} = -\Phi_{xz}^0 \xi - \Phi_{yz}^0 \eta - \Phi_{zz}^0 \zeta \quad (275)$$

Hier liegt ein lineares System mit konstanten Koeffizienten vor, dessen Lösung über das Eigenwertproblem der Jacobi-Matrix $\hat{\mathbf{J}}$, wie oben skizziert, konstruiert wird:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\vec{Z}} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \vec{Z} \text{ mit } \vec{Z} = (\xi, \eta, \zeta, u, v, w) \\ \text{charakteristische Gleichung: } \det(\hat{\mathbf{J}} - \lambda I) = 0 \end{array}} \quad (276)$$

λ sind die Eigenwerte des Systems und so ergeben sich daraus die Eigenvektoren mit

$$[\hat{\mathbf{J}} - \lambda I] \vec{\xi} = 0 \quad (277)$$

als das Fundamentalsystem des Systems (270) - (275) mit der Basis der Eigenvektoren $\vec{\xi} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$. Hieraus ergibt sich dann folgende allgemeine Lösung:

$$\vec{x}_i = \exp(\lambda_i t) (C_1, \dots, C_6)^T, \quad C_i = \text{Konstanten}$$

Für die Stabilitätsuntersuchungen interessieren zunächst nur die Lösungen der charakteristischen Gleichungen λ_i womit folgende Kriterien abgeleitet werden kann:

$$\Re \lambda_i < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{absolut stabil} \quad (278)$$

$$\Re \lambda_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{instabil} \quad (279)$$

$$\Re \lambda_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{stabile Librationen} \quad (280)$$

Nun zurück zur Stabilität der Lagrange-Punkte. Betrachtet man nun ausschließlich die horizontale Bewegung um die Punkte, da die z -Bewegung entkoppelt für $\frac{|z|}{|x|} \ll 1$, $\frac{|z|}{|y|} \ll 1$, $\frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2}} \ll 1$ bzw. $\frac{|\zeta|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \ll 1$ ist, so vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem zu:

$$\begin{array}{rcl} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + \Phi_{xx}^0 \xi + \Phi_{xy}^0 \eta & = & 0 \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + \Phi_{xy}^0 \xi + \Phi_{yy}^0 \eta & = & 0 \\ \ddot{\zeta} + \Phi_{zz}^0 \zeta & = & 0 \end{array}$$

Mit dem Ansatz $\xi = A \exp(\lambda t)$ und $\eta = B \exp(\lambda t)$ ergeben sich $\dot{x}_i = \lambda \xi$ und $\dot{\eta} = \lambda \eta$ und damit erhält man für die laterale Komponente (ξ, η) des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} (\lambda^2 + \Phi_{xx}^0) & (\Phi_{xy}^0 - 2\lambda) \\ (\Phi_{yx}^0 + 2\lambda) & (\lambda^2 + \Phi_{yy}^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \quad (281)$$

$$(282)$$

womit man die charakteristische Gleichung gewinnt:

$$\implies \boxed{\lambda^4 + (\Phi_{xx}^0 + \Phi_{yy}^0 + 4)\lambda^2 + \Phi_{xx}^0 \Phi_{yy}^0 - (\Phi_{xy}^0)^2 = 0} \quad (283)$$

Die Stabilitätsuntersuchung ergibt nach (283) für \mathcal{L}_4 mit $\Phi_{xx}^0 = -3/4$, $\Phi_{yy}^0 = -9/4$, $\Phi_{xy}^0 = 3\sqrt{3}\Delta r/4$ und $\Delta r = r_2 - r_1$:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \frac{\mu_*}{(1 + \mu_*)^2} &= 0 \\ \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} r_1 r_2 &= 0 \end{aligned}$$

Substituiert man $\lambda^2 = \Lambda$, so ergibt die Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} \Lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 27r_1 r_2} \right) \\ \implies \lambda &= \pm \sqrt{\Lambda} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 27r_1 r_2} \right)} \end{aligned}$$

Die Lösungen sind Frequenzen s_i mit $\lambda_i = \imath s_i$ solange der Ausdruck unter der Wurzel negativ bleibt, was für folgende Massenverhältnisse erfüllt ist:

$$\text{Diskriminante} \geq 0 \implies 1 - 27r_1 r_2 \geq 0$$

$$\implies \mu_*^c = 4,0 \cdot 10^{-2} \approx \left. \frac{m}{m + M} \right|_c$$

$$\text{Literatur: } \left. \frac{m}{m + M} \right|_c = 3,8 \cdot 10^{-2}$$

Damit sind Lagrange-Punkte $\mathcal{L}_{4/5}$ stabil und es gilt $0 \leq \mu_* \leq \mu_*^c = 4 \cdot 10^{-2}$.

In beiden Fällen ist die Lösung oszillierend, da $\Lambda < 0$. Als Lösungsansätze ergeben sich dann:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_i^4 C_i \cos(s_i t) + \sum_i^4 S_i \sin(s_i t) \\ \eta &= \sum_i^4 \tilde{C}_i \cos(s_i t) + \sum_i^4 \tilde{S}_i \sin(s_i t) \end{aligned}$$

Mit der weiteren Annahme $C_i = \tilde{C}_i = S_i = \tilde{S}_i$ mit der Ausnahme für $i = 1$ separiert man den langperiodischen Lösungszweig und selektiert somit eine Mode $s = s_1$:

$$\begin{aligned} \xi &= C \cos(st) + S \sin(st) \\ \eta &= \tilde{C} \cos(st) + \tilde{S} \sin(st) \\ \implies \xi \tilde{C} - \eta C &= (\tilde{C} S - C \tilde{S}) \sin(st) \\ \xi \tilde{S} - \eta S &= (S \tilde{C} - \tilde{S} C) \cos(st) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich durch quadrieren und addieren eine Gleichung zweiter Ordnung:

$$\boxed{\xi^2 (\tilde{S}^2 + \tilde{C}^2) + \eta^2 (S^2 + C^2) - \xi \eta (S \tilde{S} + C \tilde{C}) = (S \tilde{C} - C \tilde{S})^2} \quad (284)$$

Die oszillierende Bewegung um die Lagrange-Punkte hat obige formale Beschreibung. Berechnet man die Eigenwerte dieses Systems, so ergeben sich die Halbachsen der Bewegung.

$$\begin{vmatrix} (\tilde{S}^2 + \tilde{C}^2) & (S\tilde{S} + C\tilde{C}) \\ (S\tilde{S} + C\tilde{C}) & (S^2 + C^2) \end{vmatrix} \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix}$$

Setzt man die Ansätze für eine Schwingungsmode in die linearisierten Bewegungsgleichungen ein, so benötigt man ihre höheren Ableitungen.

$$\begin{aligned} \xi &= C \cos(st) + S \sin(st) & \eta &= \tilde{C} \cos(st) + \tilde{S} \sin(st) \\ \dot{\xi} &= -sC \sin(st) + sS \cos(st) & \dot{\eta} &= -s\tilde{C} \sin(st) + s\tilde{S} \cos(st) \\ \ddot{\xi} &= -s^2C \cos(st) - s^2S \sin(st) & \ddot{\eta} &= -s^2\tilde{C} \cos(st) - s^2\tilde{S} \sin(st) \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen ergeben sich die Koeffizienten zu:

$$\boxed{\tilde{C}_i = \frac{2s_i S_i + \Phi_{xy}^0 C_i}{S_i^2 - \Phi_{yy}^0}; \tilde{S}_i = \frac{2s_i C_i - \Phi_{xy}^0 S_i}{\Phi_{yy}^0 - S_i^2}} \quad (285)$$

Sind die Frequenzen rein imaginär, so gibt es keinen Effekt. Jedoch bei reellen Frequenzen treten Störbewegungen auf.

Bei $\mathcal{L}_{4/5}$ liegen instabile Bewegungen vor mit $r^c \leq r_1 \leq 1/2$ und $d < 0$, $d = 1 - 27r_1 r_2$.

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\frac{1}{2} (1 \mp \sqrt{d}) = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{d}) \\ \text{mit } \sqrt{d} = ia &\implies \Lambda = \frac{1}{2} (-1 \pm ia) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $a = \sqrt{-d} = \sqrt{27r_1 r_2 - 1} \leq \frac{\sqrt{23}}{2} = 2,398$ folgendes Λ :

$$\lambda = \pm \sqrt{\Lambda} = \alpha_k + i\beta_k \quad \forall k = 1, \dots, 4$$

Betrachtet man nun den $\Re\lambda_k$, so ist das System hamiltonisch, wenn $\sum_k \Re\lambda_k = 0$.

5.1.3 Nullgeschwindigkeitskurven

Wie der Name sagt, beschreiben die Nullgeschwindigkeitskurven Kurven, auf denen die Geschwindigkeit des Körpers Null ist. In Abhängigkeit des Potentials ergeben sich verschiedene Formen von Kurven.

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} + \Phi_{eff}(\vec{r}) &= \mathcal{C}(\vec{r}) \\ \implies \frac{v^2}{2} &= \mathcal{C} - \Phi_{eff} \geq 0 \end{aligned}$$

Der erste Term auf der linken Seite ist positiv definit. Die Grenzkurven verschwindender Geschwindigkeit mit $v^2 = 0$ sind damit gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_0, y_0, z_0, r_1) - \Phi_{eff}(x, y, z, r_1) &= 0 \\ \implies \mathcal{C}_0 &= \Phi_{eff} \end{aligned} \quad (286)$$

Für das Potential allgemein galt nach (257):

$$\begin{aligned}\Phi_{eff} = \mathcal{C} &= -\frac{(x-r_1)^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{r_2}{R} - \frac{r_1}{S} \\ &\stackrel{z=0}{=} -\frac{R^2}{2} + xr_1 - \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_2}{R} - \frac{r_1}{S} \\ &= -\frac{R^2}{2} - \frac{r_1}{S}(1-xS) - \frac{r_2}{R}\end{aligned}$$

Mit der Näherung $R \ll 1$ bzw. $R \rightarrow 0$ erfolgt die Bewegung nahe dem Primärkörper. Damit werden alle r_1 -Terme klein und können vernachlässigt werden.

$$\Phi_{eff} = \mathcal{C} \approx -\frac{r_2}{R}$$

Daraus ergeben sich Kreise als Kurven, da R eine konstante Größe ist. Zusammenfassend tritt folgender „Zoo“ von Kurven auf.

1. $\Phi(x, y) \ll \Phi(\mathcal{L}_2) \implies$ Kreise um die Primärkörper
2. $\Phi(\mathcal{L}_2) \leq \Phi \leq \Phi(\mathcal{L}_1) \implies$ liegende Acht (∞), Birnen
3. $\Phi(\mathcal{L}_1) \leq \Phi \leq \Phi(\mathcal{L}_3) \implies$ Hufeisen
4. $\Phi(\mathcal{L}_3) \leq \Phi \leq \Phi(\mathcal{L}_{4/5}) \implies$ Kaulquappen

5.1.4 Nichtlineare Phänomene der DKP-Bewegung

Bei der Betrachtung nichtlinearer Phänomene werden bei den Ableitungen des Potentials in (269) höhere Ordnungen mit berücksichtigt. Als Folge davon werden die charakteristischen Frequenzen s_k noch von den Zustandsgrößen ξ und η abhängen. Die Orbitgröße der Libration hat dann auch Einfluß auf die Frequenz.

$$T(\epsilon, \vec{x}) = T_{OL}(\mu) + P(\epsilon x, \dots, \mu) \quad \text{Horns Theorem} \quad (287)$$

Hierbei ist $P(\mu, \epsilon)$ analytisch (Cauchy-Riemann) und somit in eine Taylorreihe um ϵ entwickelbar.

Zusammenfassung: Eingeschränktes DKP

1. Existenz des Jakobi-Integrals
2. Es gibt 5 Fixpunkte, die sogenannten Lagrange-Punkte.
 \implies Lösung des eingeschränkten DKP
 - (a) 3 kollineare Punkte $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ liegen auf der Achse der Primärkörper und sind instabil.
 - (b) 2 tringulare Punkte $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$ sind stabil für $r_1 \leq 0,04$. Es existieren Librationsbewegungen, die langperiodisch mit $s_1 \approx \frac{1}{2}\sqrt{27r_1}$ und kurzperiodisch mit $s_2 \approx 1 - \frac{27}{8}r_1$ sind.
3. Für $r_1 < r^c$ ergeben sich die Nullgeschwindigkeitskurven, die gute Anhaltspunkte für die Bahnen der Bewegung sind. Dabei gibt es folgende Formen:
 - Keplerbahnen $C < c - \frac{3}{2}$
 - „Hufeisen“
 - „Kaulquappen“ (Librationsellipse)

5.2 Elliptisches DKP

Hierbei gelten die Annahmen $r_1 = 1 - r_2 \ll r_2 \approx 1$. Nimmt man nun an, daß die beiden Primärkörper eine pulsierende Bewegung vollführen, so ist eine Normierung $D = 1$ nicht mehr möglich. Der Abstand zwischen beiden Primärkörpern D ist natürlich wieder durch das Zweikörperproblem (ZKP) beschrieben:

$$\begin{aligned}\ddot{D} - \Omega^2 D &= -\frac{\mu}{D^2} \\ \frac{d}{dt}(D^2\Omega) &= 0 \\ (D^2\Omega)^2 &= \mu(1 - e^2) \quad ,\end{aligned}$$

wobei hier die Halbachse des ZKP wie gehabt $a_D = 1$ normiert wurde. Dann gilt die folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (\vec{R} - \tilde{r}_1 \vec{e}_x)) = -\nabla\Phi_G \quad (288)$$

Mit der Normierung aller Längen gemäß $\vec{R} = D\vec{s}$ – wobei \vec{s} normierter Ortsvektor des zu beschreibenden Testteilchens ist – folgt dann:

$$\begin{aligned}\ddot{D}\vec{s} + 2\dot{D}\dot{\vec{s}} + D\ddot{\vec{s}} + D\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{s} + 2\vec{\Omega} \times (\dot{D}\vec{s} + D\dot{\vec{s}}) \\ - D(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (\vec{s} - r_1 \vec{e}_x))) = -\nabla\Phi_G\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $r_1 + r_2 = 1$ und somit $r_1 D(t) + r_2 D(t) = D$ wobei wie immer gelten muss:

$$r_1 = \frac{\mu_*}{1 + \mu_*} \quad r_2 = \frac{1}{1 + \mu_*}$$

Entwickelt man nun die Vektorproduktterme der Bewegungsgleichung, setzt das Keplerproblem ein

$$\ddot{D} = \frac{L^2}{D^3} - \frac{\mu}{D^2} \quad , \quad \frac{d}{dt}(D^2\Omega) = 0 \quad , \quad D = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f} \quad , \quad (289)$$

so ergibt sich mit

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem für das elliptische DKP:

$$D\ddot{\xi} - D\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\dot{\xi} - 2D\Omega\dot{\eta} - \Omega^2 \left(\frac{D^2}{1 - e^2}\xi - r_1 D \right) = -\partial_x\Phi_G \quad (290)$$

$$D\ddot{\eta} - D\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\dot{\eta} + 2D\Omega\dot{\xi} - \Omega^2 \frac{D^2}{1 - e^2}\eta = -\partial_y\Phi_G \quad (291)$$

$$D\ddot{\zeta} = -\partial_z\Phi_G \quad (292)$$

Leitet man nun nicht nach der Zeit sondern nach der wahren Anomalie ab, so ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{df}{dt} \frac{d}{df} = \Omega \frac{d}{df} \implies \dot{\xi} = \Omega \xi'$$

$$\ddot{\xi} = \Omega \Omega' \xi' + \Omega^2 \xi''$$

Setzt man dies nun in die obigen Formeln ein, kürzen sich einige Terme raus und es verbleiben:

$$\xi'' - 2\eta' - \left(\frac{D}{1-e^2} \xi - r_1 \right) = F_x \quad (293)$$

$$\eta'' + 2\xi' - \left(\frac{D}{1-e^2} \eta \right) = F_y \quad (294)$$

$$\zeta'' + \left(1 - \frac{D}{1-e^2} \right) \zeta = F_z \quad (295)$$

Für die Terme der Gravitationskraft erhalten wir (Division von D etc. in Gln. (297)-(299))

$$\vec{F}_{x/y/z} = -\frac{1}{D^3 \Omega^2} \left(r_2 \frac{\vec{z}}{z^3} + r_1 \frac{(\vec{z} - \vec{e}_x)}{\tilde{S}^3} \right) = -\frac{D}{\mu(1-e^2)} \left(r_2 \frac{\vec{z}}{z^3} + r_1 \frac{\vec{S}}{S^3} \right)$$

$$\text{mit } n^2 a^3 = \mu = \gamma(M+m) = 1$$

$$\implies \vec{F} = -\frac{D}{1-e^2} \left(r_2 \frac{\vec{z}}{z^3} + r_1 \frac{\vec{S}}{S^3} \right)$$

Bringt man all Terme auf der linken Seite, die nur Koordinaten (ξ, η, ζ) enthalten auch auf die rechte Seite, kann ein Quasi-Potenzial formuliert werden:

$$\Phi_e = -\frac{D(f)}{1-e^2} \left(\frac{(\xi - r_1(1 + e \cos f))^2 + r_2 + r_1 + \eta}{2} \right) \quad (296)$$

mit dem die Differenzialgleichungen letztlich lauten:

$$\xi'' - 2\eta' - = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \quad (297)$$

$$\eta'' + 2\xi' = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial \eta} \quad (298)$$

$$\zeta'' = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial \zeta} \quad (299)$$

Φ_e ist somit indirekt zeitabhängig, da $f = f(t)$. Eine Ähnlichkeit mit dem Jakobi-Integral ist schon zu erkennen. Benutzt man nun:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_e(\vec{R}) &\iff \dot{\vec{R}} \cdot \nabla \Phi_e \\ d\Phi_e(f, \vec{z}) &= \frac{\partial \Phi_e}{\partial f} df + d\vec{z} \cdot \nabla \Phi_e \\ \vec{z}' \cdot \nabla \Phi_e &= \frac{d\Phi_e}{df} - \Phi_e' \end{aligned}$$

und geht komponentenweise Ähnlich wie beim eingeschränkten DKP vor, so erhält man für das Potential:

$$\Phi_e = -(1 + e \cos f)^{-1} \left(\frac{1}{2} (\xi - r_1 (1 + e \cos f))^2 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{r_1}{\tilde{S}} + \frac{r_2}{z} \right)$$

$$\xrightarrow{e, r_1 \ll 1} \Phi_e = -\frac{1}{1 + e \cos f} \Phi_{eff}^{DKP}$$

$$\frac{d}{df} \left(\frac{\xi'^2}{2} + \frac{\eta'^2}{2} + \frac{\zeta'^2}{2} + \Phi_e \right) = -\Phi_e'$$

$$\implies \frac{v^2}{2} + \Phi_e = -\int df \Phi_e'$$

Damit ergeben sich auch hier analoge Darstellungen:

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \Phi_{eff}^{DKP} (1 - 2e \cos f) = \mathcal{C}(\vec{z}_0, \dot{\vec{z}}_0)} \quad (300)$$

$$\boxed{\Phi_{eff}^{DKP} = (1 + 2e \cos f) \mathcal{C} = \mathcal{C}_*}$$

Für das elliptische DKP bleiben die Lagrange-Punkte und ihre Stabilitätseigenschaften erhalten. Auch hier erweisen sich Störungen als kleine Schwingungen. \mathcal{C}_* oszilliert um \mathcal{C} und die Nullgeschwindigkeitskurven pulsieren.

6 Das Hill-Problem

Das eingeschränkte DKP wird in folgender Weise modifiziert (hier anhand: Planet-Satellit-Teilchen), um das Hill-Problem zu gewinnen:

1. Verschiebung des Koord.-Ursprung \implies Sekundärkörper (Satellit)
2. Entwicklung des Planetenpotentials

Ausgangspunkt sind wieder die Gleichungen des DKP:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= (x - r_1) - \frac{r_2 x}{R^3} - \frac{r_1(x-1)}{S^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - \frac{r_2 y}{R^3} - \frac{r_1 y}{S^3} \\ \ddot{z} &= -z \left(\frac{r_2}{R^3} + \frac{r_1}{S^3} \right)\end{aligned}$$

in denen wir den Ursprung des Koordinatensystems $\tilde{x} = x - 1$ verschieben, womit sich für die x-Komponente ergibt:

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} &= (1 + \tilde{x} - r_1) - \frac{r_2(1 + \tilde{x})}{\tilde{R}^3} - \frac{r_1 \tilde{x}}{\tilde{S}^3} \\ \tilde{R}^2 &= (1 + \tilde{x})^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \\ \tilde{S}^2 &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2\end{aligned}$$

Im Folgendem werden wir der Einfachheit halber die „Tilde“ weggelassen. Das Potential des Zentralkörpers (Stern/Sonne, Planet) lautet:

$$\Phi_P = -\frac{r_2}{R} = -r_2 \left\{ (1 + x^2)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{-1/2},$$

welches wir um die Position des Sekundärkörpers entwickeln und erhalten:

$$\Phi_P = \Phi(0) + \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_0 \cdot x_i + \sum_{ij} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 \cdot x_i x_j \quad . \quad (301)$$

Man beachte, dass am Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$ für die Abstände gilt: $R = 1; S = 0$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\implies \frac{\partial \Phi_P}{\partial x} &= \frac{r_2(1+x)}{R^3} \longrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 = r_2 \\ \frac{\partial \Phi_P}{\partial y} &= \frac{r_2 y}{R^3}; \quad \frac{\partial \Phi_P}{\partial z} = \frac{r_2 z}{R^3} \longrightarrow 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial x^2} &\longrightarrow -2r_2; \quad \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial y^2} \longrightarrow r_2; \quad \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial z^2} \longrightarrow r_2 \\ \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial x \partial y} &\longrightarrow 0 \quad .\end{aligned}$$

Mit $r_2 = 1 - r_1$ ergibt sich dann für die rechte Seite:

$$-\frac{\partial\Phi_P}{\partial x} = -r_2 + 2r_2x = -(1 - r_1)(1 - 2x) = -1 + 2x + r_1$$

$$-\left.\frac{\partial\Phi_P}{\partial y}\right|_0 = -y + r_1y \tag{302}$$

$$\tag{303}$$

– man beachte, dass in Gl. (301) die ersten Ableitungen des Zentralpotentials nicht notwendiger Weise verschwinden – erst wenn man die Zentrifugalbeiträge hinzunimmt, hebt sich die Kraftwirkung auf.

Das Zentralpotenzial lautet nun linear genähert:

$$\Phi_p = r_2(x - 1) - r_2x^2 + \frac{r_2}{2}y^2 + \frac{r_2}{2}y^2 . \tag{304}$$

Die Komponenten des Gradienten lauten damit:

$$-\frac{\partial\Phi_P}{\partial x} = 2x - 1 + r_1 \tag{305}$$

$$-\frac{\partial\Phi_P}{\partial y} = -y(1 - r_1) \tag{306}$$

$$-\frac{\partial\Phi_P}{\partial z} = -z(1 - r_1) \tag{307}$$

Das eingesetzt in das DKP-Gleichungssystem lautet damit

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - 3x &= -\frac{r_1(x - 1)}{S^3} + O(r_1) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{r_1y}{S^3} + O(r_1) \\ \ddot{z} + z &= -z\frac{r_1}{S^3} + O(r_1) , \end{aligned} \tag{308}$$

wobei zu beachten ist, dass die vernachlässigten Ordnungen nur Terme r_1x_i betreffen, mit $x_i \equiv x, y, z \rightarrow 0$. M.a.W. auf die Gravitationsterme $x_i/S^3 \approx O(1)$ trifft das nicht zu, da alle Abstände $|x_i|, S \rightarrow 0$ sehr klein sind. Das Effektivpotential lautet (Leistungssatz und Integration)

$$\Phi_H = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{r_1}{S} . \tag{309}$$

Damit Formulierten wir – wie üblich – über den Leistungssatz das **Jacobi-Integral** für das Hill-Problem

$$\frac{v^2}{2} + \Phi_H = C \tag{310}$$

6.1 Librationspunkte & Nullgeschwindigkeitskurven

Auch hier verschwinden an den Fixpunkten alle (auch höhere) Zeitableitungen von x, y, z , wo mit Gln. (308), wie im eingeschränkten Dreikörperproblem, gelten muss

$$\nabla\Phi_H = 0 \quad . \quad (311)$$

Aus der y und z Ableitung liest man sofort ab, dass die Lagrange-Punkte bei $y = z = 0$ liegen müssen – also eine Situation wie bei den ko-linearen des vollständigen DKP's vorliegt. Bleibt die x -Komponente der verschwindenden Kraft

$$\partial_x\Phi_H = -3x + r_1\frac{x}{S^3} = x\left[-3 + \frac{r_1}{x^3}\right] = 0 \quad , \quad (312)$$

wobei das Verschwinden der eckigen Klammern

$$-3 + \frac{r_1}{x^3} = 0 \quad (313)$$

was uns zur Hill-Skala bringt, die wir auch schon im DKP bei $L_{1/2}$ gefunden hatten. Man muss nun die Fälle $x > 0$ und $x < 0$ unterscheiden und man erhält

$$x_{1/2} = \pm h = \pm \left\{\frac{r_1}{3}\right\}^{1/3} \quad . \quad (314)$$

Inhaltsverzeichnis