*** ONLINE EINSCHUB KREISEL ***

IV. SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE.

Ende des 19. Jahrhunderts:

- Mechanik basiert auf Galileitransformation: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ ∴ $\vec{v} = \text{const.}$
  $\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$: gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegte Bezugssysteme sind einander äquivalent. Diese Annahme, die aus der Newtonschen Bewegungsgleichung folgt, ist in Einklang mit der Erfahrung aus mechanischen Experimenten.
- Maxwellgleichungen waren ebenfalls sehr erfolgreich, sind jedoch nicht Galilei-invariant. Ist das Galileiprinzip fundamental, so muss es für die Elektrodynamik ein ausgezeichnetes System geben: Ätherhypothese. Aber: Experimente wie das von Michelson (1881) und Morley (1887) konnten jedoch keinen Einfluss der Relativgeschwindigkeit eines Beobachters (bezüglich des Äthers) auf die Lichtgeschwindigkeit feststellen: aus $\dot{\vec{r}} = c\vec{n}$ folgt nicht $\dot{\vec{r}}' = c\vec{n} - \vec{v}$.
- Vorarbeiten von v.a. Lorentz und Poincaré stellt Einstein 1905 seine Theorie der speziellen Relativität vor.
- Dies bewirkte auch eine grosse Krise in der Philosophie, vor allem um den Begriff der Induktion (s.z.Bsp. Karl Poppers Buch Die beiden Grundprobleme der Erkenntnistheorie).

$\Longrightarrow$ Dilemma: Ist (i.) das Galileische Relativitätsprinzip gültig für die Mechanik, aber nicht für die Elektrodynamik, wobei letztere ein bevorzugtes Referenzsystem (den Äther) besitzt?
(ii.) ein Relativitätsprinzip für Mechanik und Elektrodynamik richtig und damit die Formulierung der Maxwellgleichungen inkorrekt?
(iii.) oder existiert ein gemeinsames Relativitätsprinzip, es sind aber die Gesetze der Newtonschen Mechanik falsch?

Experimente zeigen deutlich:
(i.) Die Existenz eines Äthers kann nicht gezeigt werden.
(ii.) Vorgeschlagene Modifikationen der Elektrodynamik erweisen sich als haltlos.

Einsteins Postulat: Systeme transformieren sich mit der Lorentztransformation. Insbes. ist somit die Lichtgeschwindigkeit in allen gleichförmig bewegten Systemen identisch.
$\Rightarrow$ Revision der Begriffe von Zeit und Gleichzeitigkeit.
Äquivalenzpostulat: alle (nicht nur die Lichtgeschwindigkeit) Erscheinungen der Physik erscheinen in allen gleichförmig bewegten Systemen gleich. $\rightarrow$ es ist nicht mehr möglich zu sagen, ob ein System wirklich stationär ist oder nicht. Aussagen lassen sich nur noch über die relative Bewegung zweier Systeme machen.
z. Bsp.: Konsequent ist, dass Wellengleichung $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ das Verhalten einer sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzenden EM-Welle in allen Systemen beschreibt.

$\Rightarrow$ Newtonsche Bewegungsgleichung nicht allgemein gültig. Wir fordern aber, dass diese Gleichung für Geschwindigkeiten $\ll c$ als Grenzfall enthalten sind, da sie dort empirisch erfolgreich sind.

1.) Die Lorentztransformation. Wir betrachten zwei gleichförmig bewegte Systeme, die zu $t=0$ zusammenfallen. Zu $t=0$ Lichtblitz in $\vec{r}=0$. Beobachter im System $\vec{r}$ sieht Kugelwelle: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$. Invarianz der Lichtgeschwindigkeit: $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$!
t': möglicherweise wird die Zeit transformiert! (Verlust der Absolutät der Zeit!)
$\rightsquigarrow$ gesuchte Transformation muss $x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$ erfüllen.

Schreiben wir x_1, x_2, x_3 anstelle x, y, z und ~~$z\,t$~~ x_4 anstelle ict
$\Rightarrow \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu'^2$. Die x_i spannen den Minkowskiraum ("Welt-Raum") auf.

O.B.d.A. betrachten wir zwei Systeme, deren Achsen parallel sind. $\vec{v}$ gehe in x_3-Richtung.

Koordinatentransformation: $x_\mu' = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu$

Orthogonalitätsbedingung: $\sum a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}$

Senkrechte bleiben erhalten: $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$.

Annahme: x_1 und x_2 beeinflussen die Transformation von x_3 und x_4 nicht $\Rightarrow$

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Orthogonalität: $\delta_{33} = 1 = a_{33}^2 + a_{34}^2$
$\delta_{44} = 1 - a_{43}^2 + a_{44}^2$ $\quad \delta_{34} = \delta_{43} = 0 = a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44}$

4. Bedingung: $x_3' = 0$ bewegt sich gleichförmig längs x_3: @t ist seine Koordinate $x_3 = vt$. Mit $x_4 = ict \Rightarrow \underline{x_3 = vt = -i\beta x_4 \therefore \beta \equiv v/c}$.

Aus Trafo: $x_3' = a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = x_4(a_{34} - i\beta a_{33})$

$\Rightarrow$ im Ursprung $x_3' = 0$ gilt somit $x_3' = x_4(a_{34} - i\beta a_{33}) = 0$

$\Rightarrow a_{34} = i\beta a_{33}$.

Aus Orthog.-bed. $1 = a_{33}^2 + a_{34}^2 = a_{33}^2(1-\beta^2) \Rightarrow a_{33} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ rein reell

und $a_{34} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, rein imaginär

Aus Ortho-bed. $0 = a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} \rightsquigarrow a_{43} = -a_{44}\frac{a_{34}}{a_{33}} = -i\beta a_{44}$

Mit Ortho-bed. $1 = a_{43}^2 + a_{44}^2 \rightsquigarrow a_{44}^2 - \beta^2 a_{44}^2 = 1 \rightsquigarrow a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow a_{43} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Rightarrow$ Matrix der Lorentztrafo[x)]: $(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$

Die Untermatrix entspricht einer Drehung $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ in x_3x_4-Ebene mit imaginärem Winkel, denn $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$.

---

x) Inverse: Ersetze gestrichene & ungestrichene Grössen und nehme $v \to -v$.

Lorentztrafo lautet also: $x' = x,\ y' = y,\ z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Die Zeit wird also explizit transformiert und koppelt an die räumliche z-Achse.

Konsequenzen: (1.) Lorentz-Fitzgeraldsche Kontraktionshypothese

Stab in System $\vec{r}$ in Ruhe, liegt in x_3-Richtung: $l = z_2 - z_1$

Im System $\vec{r}\,'$ wird zu t' die Länge gemessen durch Feststellen der Endpunkte z_1', z_2'.

Inverse Trafo: $z_1 = \frac{z_1' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und $z_2 = \frac{z_2' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow z_2' - z_1' = l\sqrt{1-\beta^2}$

ist scheinbare Länge $\Rightarrow$ der Stab erscheint dem bewegten Beobachter kürzer.

N.B.: Gleichzeitiges Messen in $\vec{r}\,'$ ist nicht gleichzeitig in $\vec{r}$!

(2.) Zeitdilatation: Uhr im System $\vec{r}$ auf z_1. Beobachter im bewegten System im gleichen Punkt bemerkt Zeit

$$t_1' = \frac{t_1 - vz_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Zur Zeit t_2 misst ein ähnlicher Beobachter:

$$t_2' = \frac{t_2 - vz_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1' \\ t_2' \end{array}\right\} \quad t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$\vec{r}\,'$-Beobachter sagt: Uhr geht nach. Aber: gleiches Resultat im umgekehrten Fall

Im relativ bewegten System erscheint die Zeit langsamer.

Es gibt keine Relativgeschwindigkeit $> c$: denn laut Lorentztrafo $\nexists$ reelles relativ dazu gleichförmig bewegtes System, wenn $v > c$.

Addition von mehreren Relativ-Geschwindigkeiten: Betrachte sukzessive Trafo der Komp. 3 & 4:

$$(\bar{a}_{\mu\nu}'') = (\bar{a}_{\mu\nu}')(\bar{a}_{\mu\nu}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\begin{pmatrix} 1 & i\beta_2 \\ -i\beta_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i\beta_1 \\ -i\beta_1 & 1\end{pmatrix} = \cancel{1+\beta_1\beta_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2)^2}}\begin{pmatrix} 1+\beta_1\beta_2 & i\beta_1 + i\beta_2 \\ -i\beta_1 - i\beta_2 & 1+\beta_1\beta_2\end{pmatrix} = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2)^2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{i\beta_1 + i\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \\ -\frac{i\beta_1 + i\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} & 1\end{pmatrix}$$

Dies soll gleich sein $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \quad \text{für Geschwindigkeiten: } v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Für $\beta_i \leq 1$ ist $\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$ immer ≤ 1 $\Rightarrow$ auch mehrere Lorentztrafos können keine Relativgeschwindigkeit erzeugen, die grösser als c ist.

2.) Geometrische Interpretation: Raum-Zeit-Diagramme

Betrachte Koordinatensysteme S, S', die sich mit $\vec{v}$ zueinander bewegen. Zu $t=0$ seien beide Systeme übereinander, und es wird ein Lichtpuls in $\vec{r}=\vec{r}\,'=0$ erzeugt:

$$\left.\begin{aligned} (ct)^2-(x^2+y^2+z^2) &= (ct)^2-\vec{r}^{\,2}=0 \\ (ct')^2-(x'^2+y'^2+z'^2) &= (ct')^2-\vec{r}\,'^2=0 \end{aligned}\right\}$$

Grösse $(ct)^2-\vec{r}^{\,2}$ ist lorentzinvariant für alle Ereignisse $E_1=(\vec{0},0)$ und $E_2=(\vec{0},0)$, die durch ein Lichtsignal miteinander verbunden werden können.

Wir nennen die Grösse $(\vec{r}, ct)$ einen <u>Weltpunkt</u>.

$s=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2}$ heisst Abstand oder vierdimensionale Entfernung zwischen zwei Ereignissen $(\vec{r}_1, ct_1)$ und $(\vec{r}_2, ct_2)$.

<u>Beh.:</u> Das Quadrat <u>$s^2=c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2$ ist lorentzinvariant.</u>

<u>Bew.:</u> Verschiebe Strecke um $-\vec{r}_1$ und Zeit um $-t_1$: $E_1=(\vec{0},0)$, $E_2=(\vec{r}, ct)$

$$s^2=(ct)^2-(x^2+y^2+z^2) \overset{\text{Inverse Lorentz}}{=} \left(c\,\frac{t'+vz'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2-\left(\frac{z'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2-y'^2-x'^2$$

$$=\ldots=(ct')^2-(x'^2+y'^2+z'^2) \quad \square$$

Das Vorzeichen von s^2 bestimmt, ob zwischen den Ereignissen E_1 & E_2 ein kausaler Zusammenhang besteht:

(1.) $s^2 > 0$: Intervall heisst zeitartig, d.h., Zeitterm grösser Raumterm. Ein kausaler Zusammenhang ist möglich, das frühere Ereignis kann also das spätere verursachen.

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \parallel$ z-Achse und $z_2 > z_1$, $t_2 > t_1$
$\Rightarrow E_1 = (x, y, z_1, ct_1)$, $E_2 = (x, y, z_2, ct_2)$.

System S' bewege sich parallel z-Achse mit $v^* = \dfrac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} < c$ wegen $s^2 > 0$

In S' haben Ereignisse E_1 & E_2 denselben Ort:

$$z_2' - z_1' = \frac{z_2 - z_1 - v^*(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{s}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t_2' - t_1')^2 - (\vec{r}_2' - \vec{r}_1')^2} = t_2' - t_1'.$$

Für zeitartige Intervalle $s^2 > 0$ zwischen zwei Weltpunkten ist die lorentzinvariante Grösse s/c die Eigenzeit eines Körpers, der mit v^* von Ereignis E_1 nach E_2 fliegt.

Da s lorentzinvariant: Die Eigenzeit ist eine lorentzinvariante Grösse.

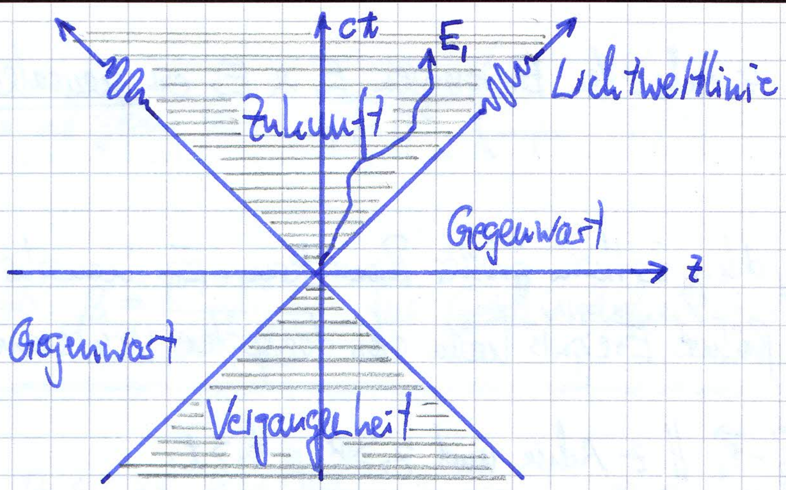
(2.) $s^2 < 0$: Raumartig: Ereignisse voneinander unabhängig, da ein kausaler Zusammenhang unmöglich.

(3.) $s^2 = 0$: Lichtartig: Kausaler Zusammenhang mittels Lichtstrahl möglich.

Lorentztrafos heben die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an verschiedenen Orten auf, da sie Ort und Zeit mischen. Anstelle der Gleichzeitigkeit tritt die Kausalität.

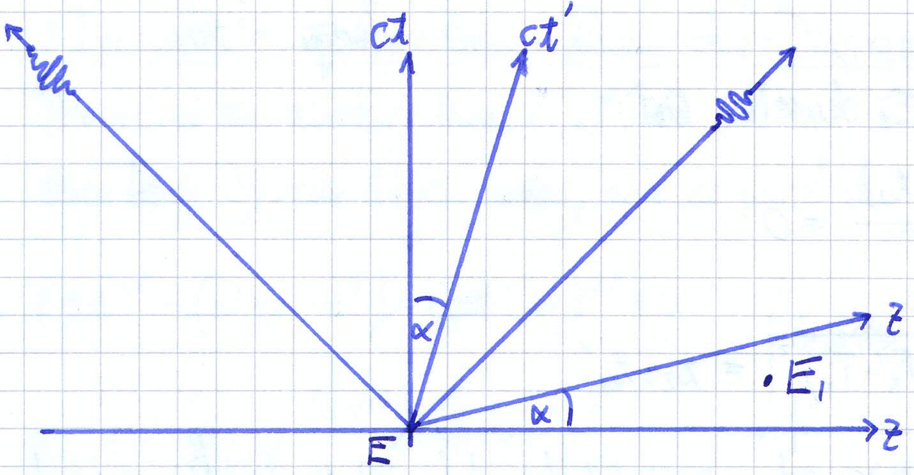
1908 Minkowski führt die nach ihm benannten Diagramme ein.

Ort z und ct haben gleiche Einheit und können so im selben Massstab aufgetragen werden.



Weltlinien vom Ursprung zum Ereignis E_1 entsprechen massiven Teilchen. Vergangene Ereignisse können das Ereignis im Ursprung verursachen. Ursprung hat keinen kausalen Zusammenhang zu nicht-schraffierte Flächen (Gegenwart).

Koordinatensysteme S & S':



ct'-Achse: Weltlinie eines Teilchens, das in S' ruht ist // ct'-Achse:.

$$\Delta z' = \frac{\Delta z - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

Winkel α: $\tan\alpha = \frac{v}{c} = \frac{\Delta x}{c\Delta t}$

Gleicher Winkel, da Licht Winkelhalbierende sein muss!

Einheiten: in S' um Faktor $\sqrt{1+\beta^2}/\sqrt{1-\beta^2}$ länger als im ruhenden System S (ohne Bew.)

Relativität der Gleichzeitigkeit. E_1 hat pos. Zeit in S & geschieht somit <u>nach</u> E im Ursprung. In S' liegt E_1 unter z'-Achse, also <u>vorher</u> als E.

3.) Relativistische Dynamik.

Zwei Grundforderungen: • Für kleine Geschwindigkeiten Reduktion zur Newtonmechanik
• Die relativistischen Gleichungen müssen lorentzinvariant sein.

<u>Vierervektoren.</u> Viele nichtrelativistische Gleichungen sind Vektorgln. im 3D Raum. Bei Drehung im Raum ändern sich die Komponenten aller 3D Vektoren in gleicher Weise. Bsp. Drehung um z: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ geht über in

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi \\ -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \\ A_z \end{pmatrix}$$

Vektorquadrat und Skalarprodukt zweier Vektoren sind unter Drehung invariant.
Alle Vektoren transformieren sich gleich ⇒ Invarianz der Mechanik unter Drehung:
gilt $\vec{F} = m\vec{a}$ in einem Inertialsystem, so gilt es auch in einem gedrehten Inertialsystem:
denn
- Länge & Richtung von $\vec{F}$ & $\vec{a}$ erhalten
- Komponenten von $\vec{F}$ & $\vec{a}$ transformieren sich gleich: $F_i = ma_i \rightsquigarrow F_i' = ma_i'$
- skalare Masse invariant

Relativistisch: Raum & Zeit mischen. Es ist sinnvoll, einen Vierervektor zu betrachten:

$\underline{x} = (ct, \vec{r})$

Räumliche Drehung: $$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Drehung}} \underline{x}' = \begin{pmatrix} ct \\ x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Bei einer Lorentztrafo: $$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Lorentztrafo}} \underline{x}' = \begin{pmatrix} \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Alle Grössen $\underline{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ die sich unter Drehung und Lorentztrafo wie $\underline{x} = (ct, x, y, z)$ transformieren, heissen <u>Vierervektoren</u>.

Quadrat: $\underline{A}^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2$ ⇒ aus $\underline{A}^2 = 0$ folgt nicht $\underline{A} = 0$

Skalarprodukt: $\underline{A} \cdot \underline{B} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$

Laut Def. transformieren sich alle Vierervektoren bei einer Lorentztrafo wie $\underline{x}$. Da
$s^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = (ct)^2 - \vec{r}^{\,2}$
lorentzinvariant ist ⇒ Quadrat $\underline{A}^2$ von Vierervektoren ebenfalls lorentzinvariant.

Skalarprodukt ist lorentzinvariant, denn $(\underline{A} + \underline{B})^2 = \underline{A}^2 + 2\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{B}^2$ ⇒ $\underline{A} \cdot \underline{B}$ ist l.i.

lorentzinvariant

Relativistischer Impuls Wir definieren Vierervektoren anstelle der klassischen Grössen $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{p}, \vec{F}$.

Wir hatten bereits $\underline{x} = (ct, \vec{r})$ sowie die Eigenzeit $d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, dt$ Lorentzskalar

$d\underline{x}/dt = (c, \vec{v})$ kein Vierervektor, da Zeit dt sich transformiert.

Aber $\underline{u} \equiv \frac{d\underline{x}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt}(ct, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(c, \vec{v})$ ist Vierervektor,

genannt Vierergeschwindigkeit. Da $\underline{u}\cdot\underline{u} = \frac{1}{1-\beta^2}(c^2 - v^2) = c^2$ ist $\underline{u}$ zeitartig.

Viererbeschleunigung: $\underline{a} \equiv \frac{d^2\underline{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(c, \vec{v})\right) \underset{\frac{d}{dt}v^2 = 2\vec{v}\cdot\vec{a}}{=}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\frac{1/2}{(1-\beta^2)^{3/2}}\left(-2\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)(c, \vec{v}) + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(0, \vec{a})\right)$$

denn $d/dt\; v^2 = d/dt\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2\vec{v}\cdot\vec{a}$

$$\Rightarrow \underline{a} = \frac{1}{1-\beta^2}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}(c, \vec{v}) + (0, \vec{a})\right)$$

$\underline{a} \perp \underline{u}$, denn: $0 = \frac{d}{d\tau}c^2 \underset{\text{s.o.}}{=} \frac{d}{d\tau}\underline{u}\cdot\underline{u} = 2\underline{u}\cdot\underline{a} \rightsquigarrow \underline{u}\cdot\underline{a} = 0$.

Viererimpuls: $\underline{p} \equiv m_0 \underline{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(c, \vec{v})$. m_0 ist die Ruhemasse

$\underline{p}$ ist zeitartig: $\underline{p}\cdot\underline{p} = \frac{m_0^2}{1-\beta^2}(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2 > 0$. Da $\underline{p}^2$ lorentzinvariant $\Rightarrow m_0$ l.i.

dynamische oder relativistische Masse: $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ Zunahme von $m(v)$ für $v \to c$.

$\rightsquigarrow \underline{p} = m_0 \underline{u} = m(v)(c, \vec{v})$.

Da wir die Newtonmechanik so wenig wie möglich ändern wollen, verallgemeinern wir das 2. Newtonaxiom wie folgt:

$\underline{K} = \frac{d}{d\tau}\underline{p} = m_0 \frac{d}{d\tau}\underline{u} = m_0 \underline{a}$. Viererkraft $\underline{K}$ oder Minkowskikraft.

Räumliche Komponenten:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{K} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt}(m(v)\,\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p} = \sqrt{1-\beta^2}\,\vec{K} \overset{!}{=} \vec{F}_{Newt}$$

$\vec{F}_{Newt}$ ~~ist die~~ entspricht der bekannten Newtonschen Kraft und $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{F}_{Newt}$.

Räumlicher Anteil der relativistischen Bewegungsgleichung: $m_0 \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{F}_{Newt}$

mit $\frac{d}{dt} v^2 = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$ folgt

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1}{1-\beta^2} \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \vec{v} + \vec{a} \right) = \vec{F}_{Newt} \qquad v \ll c: \ \frac{d}{dt} m_0 \vec{v} = \dot{\vec{p}} = \vec{F}_{Newt}.$$

Zeitliche Komponente:

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = m_0 \underline{a} \cdot \underline{u} \overset{s.o.}{=} 0 = K_0 u_0 - \vec{K} \cdot \vec{u} = \frac{K_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{1-\beta^2} \vec{F}_{Newt} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\vec{F}_{Newt} \cdot \vec{v}}{c}$$

$\Rightarrow$ Minkowskikraft wird somit zu $\underline{K} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\vec{F}_{Newt} \cdot \frac{\vec{v}}{c}, \vec{F}_{Newt} \right)$.

Masse und Energie:

Betrachte die zeitliche Komponente von oben: $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\vec{F}_{Newt} \cdot \vec{v}}{c}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{F}_{Newt} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}$ Leistung, die Kraft $\vec{F}_{Newt}$ am Körper verrichtet.

Integration über Zeit: $m(t) c^2 - m(0) c^2 = \int_0^t \mathcal{P}(t') dt' = W$ Arbeit

Unterliegt der Körper nur der Kraft $\vec{F}_{Newt}$ $\Rightarrow$ W = Änderung der kinet. Energie T:

$T(t) - T(0) = m(t) c^2 - m(0) c^2$ und es muss sein $T(0) = 0$.

$\Rightarrow T = mc^2 - \underbrace{m_0 c^2}_{\text{"unwichtige Integrationskonstante"}}$ N.B.: $T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1 \right) = \frac{m_0}{2} v^2$ ✓.

Zwei Terme: $- m(v) c^2$ Gesamtenergie, wächst mit v

$- m_0 c^2$ Ruheenergie

Relativistische Gesamtenergie ohne äusseres Potential: $E = T + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v) c^2$

Kurz: $\underline{\underline{E = mc^2}}$

Mit Potential V: $E = mc^2 + V$. Äquivalenz von Masse und Energie

Umwandlung von Ruhemasse in kinet. Energie und umgekehrt.

Erhöhung der Energie eines Körpers um $\Delta E \Rightarrow$ Masse erhöht sich um $\Delta E / c^2$

Newton: E und m separat erhalten; Relativitätstheorie: nur ein Erhaltungssatz.

mit $E = m(v)c^2 = p_0 c$ schreibt sich der Viererimpuls als

$$\underline{p} = \left(\frac{E}{c},\ m(v)\vec{v}\right).$$

es ist $\underline{p}^2 = \frac{m_0^2}{1-\beta^2}(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2(v)v^2$

$\Rightarrow E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$: $p = m(v)v$ Impulsbetrag.

$\Rightarrow$ positive Wurzel $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2}$

bzw. umgekehrt: $p = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} m_0 v = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2}$

Bsp.: (1.) Massenverlust der Sonne. Energieerzeugung durch Fusion, u.a. Helium aus zwei Protonen & zwei Neutronen. Masse Heliumkern um $\Delta m_0 \hat{=} 5 \cdot 10^{-29}$ kg kleiner als Masse der Bausteine $\Rightarrow$ Massendefekt $\equiv$ Freisetzung von Energie.
Intensität Sonnenstrahlung am äusseren Rand der Erdatmosphäre: 1.36 kW/m^2
Licht braucht ca. 8.5 min von Sonne zur Erde

$\rightsquigarrow P = 1360 \frac{W}{m^2} \cdot 4\pi R^2 = 1360 \frac{W}{m^2} \cdot 4\pi \left(8.5 \cdot 60\,\text{sec} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{\text{sec}}\right)^2 \approx 3.8 \cdot 10^{26}$ W

Gesamtleistung Sonne

$\rightsquigarrow$ Masseverlust pro sec: $\Delta m = \frac{P \cdot 1\,\text{sec}}{c^2} \approx 4.3 \cdot 10^9$ kg $\ll M_{\text{sonne}} \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg.

(2) Inelastischer Stoss. Im Laborsystem fliege Teilchen 1 mit Ruhemasse $3m_0$ & Energie $5m_0c^2$ & stosse auf Teilchen 2 mit $7m_0$ Ruhemasse: beide Teilchen verschmelzen.
$\Rightarrow$ Geschwindigk. & Ruhemasse des neuen Teilchens?
Impulsbetrag Teilchen 1:

$$p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{(5m_0c^2)^2 - (3m_0c^2)^2} = 4m_0c$$

Flug in x-Richtg.

Erhaltung Viererimpuls bei inelast. Stoss: $\left(\frac{12 m_0 c^2}{c}, 4m_0c, 0, 0\right) = \left(\frac{m_{0,\text{neu}}\, c^2}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m_{0,\text{neu}}\, u}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0\right)$

$\Rightarrow u = \frac{c}{3}$; $m_{0,\text{neu}} = 8\sqrt{2}\, m_0 \hat{=} 11.3\, m_0$

Ruhemasse des neuen Teilchens > Ruhemasse Ausgangsteilchens, entstanden aus kinet. Energie.

Photonen: fliegen mit Lichtgeschwindigkeit
(andere Teilchen mit Ruhemasse null: Gluon (starke Wechselwirkung), Graviton (Gravitation) und Neutrino (im Standardmodell))

$\Rightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ & $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ nur endlich wenn $m_0 = 0$

Bestimmung von E & p aus obigem Erg. $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2}$

mit $m = 0$: $E_{Photon} = p_{Photon}\, c$

Quantentheorie: $E_{Photon} = hf = \hbar\omega$; $h = 6.625 \cdot 10^{-34}\ J \cdot sec$

$\Rightarrow p_{Photon} = \frac{E_{Photon}}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Photonen mit Ausbreitungsrichtung x: $p_{Photon} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega}{c}, 0, 0\right)$

$p^2_{Photon} = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 = 0$

Aus $E_{Photon} = \hbar\omega = m_{Photon} c^2 \leadsto m_{Photon} = \frac{\hbar\omega}{c^2}$ dynamische Photonmasse

$\leadsto$ Rotverschiebung im Schwerefeld

Strahlungsdruck: monofrequente Quelle mit Strahlungsleistung P_s strahlt pro sec ab:

$N = \frac{P_s}{\hbar\omega}$ Photonen $\Rightarrow$ bei vollständiger Absorption wird auf bestrahlte Fläche A der

Strahlungsdruck $p_{strahl} = \frac{\text{Impulsänderung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = N \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{1}{A} = \frac{P_s}{c} \cdot \frac{1}{A}$

Vollständige Reflexion: doppelter Betrag.
In Sternen verhindert Strahlungsdruck den Kollaps. Ausserhalb Sonne: Ablenkung Kometenschweif

4. Lagrangeformulierung der relativistischen Mechanik

Wir hatten $\vec{F}_{Newt} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt} m(v)\vec{v}$, kurz $F_i = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Hamiltonsches Prinzip: $\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0$

Versuche L zu finden, für die die Euler-Lagrangegleichungen die relativistischen Bewegungsgleichungen ergeben.

Beh.: $L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - V$:. $V = V(\vec{r})$ ist korrekte Lagrangefkt.

Lagrangegl.: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ und damit } \frac{d}{dt}\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \quad \square$$

Bem.: Es gilt nicht mehr $L = T - V$, aber weiterhin $p_i = \partial L / \partial v_i$

Übergang zu generalisierten Koordinaten $q_i, \dot{q}_i$; es gilt nach wie vor $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ so dass zyklische Koordinaten die Erhaltung der konjugierten Impulse bedingt.

Neu: Ausdruck des Energieerhaltungssatzes.

Wir haben für $H = \sum \dot{q}_i p_i - L$ für ein Teilchen:

$$H = \sum \frac{m_0 v_i^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + V = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2\right) + m_0 c^2 + V$$

$$= T + V = m(v)c^2 + V = E \quad \text{Gesamtenergie}$$

Diese Formulierung ist aber nicht wirklich relativistisch, da sie nicht als x_ν und $u_\nu \equiv dx_\nu / d\tau$ ausgedrückt wird. Wir wollen deshalb eine

Kovariante Lagrangesche Formulierung:

Hamiltonsches Prinzip $\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L'(x_\nu, u_\nu, \tau)\, d\tau = 0$; L': kovariante Lagrangefunktion

Dieses L' ist aber oft nicht bekannt. So kann beispielsweise die Gravitationskraft mit ihrer instantanen Ausbreitung nicht kovariant ausgedrückt werden.

Wir beschränken uns auf ein L':. 1. Freies Teilchen, 2. Kräfte sind elektromagnetischer Natur.

Kovariante Euler-Lagrangegleichungen:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L'}{\partial u_\nu} - \frac{\partial L'}{\partial x_\nu} = 0$$

Freies Teilchen: $\frac{d}{d\tau} m_0 u_\nu = 0$ muss erfüllt sein ($\vec{F}_{Newt} = 0$)

Dies ist der Form nach der nichtrelativist. Gl. $\frac{d}{dt} m v_i = 0$ ähnlich

Ersetze in $L = \frac{1}{2} m v^2$ den Term v^2 durch Quadrat der Weltgeschwindigkeit:

$$L' = \frac{1}{2} m_0 u_\nu u_\nu \Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial x_\nu} = 0 \text{ und } \frac{\partial L'}{\partial u_\nu} = m_0 u_\nu = p_\nu \quad \checkmark$$

EM Kraft auf Teilchen der Ladung q:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A})\right)$$

$$F_i = -q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right] + \frac{1}{c}\frac{dA_i}{dt}\right)$$ aus Maxwellgln. (ohne Bew.)

A_i Vektorpotential

Kovariante Form: $F_i = -\frac{q}{c}\sqrt{1-\beta^2}\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}[u_\nu A_\nu] + \frac{dA_i}{dt}\right)$; $A_i = A_i,\ A_4 = i\phi$

Geeignetes L': $L' = \frac{1}{2} m_0 u_\nu u_\nu + \frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda$

Kanon. Impulse $\quad p_\nu = \frac{\partial L'}{\partial u_\nu} = m_0 u_\nu + \frac{q}{c} A_\nu$

Lagrangegleichungen: $\frac{d}{d\tau}\left(m_0 u_\nu + \frac{q}{c} A_\nu\right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda\right) = 0$

$$\text{oder } \frac{d}{d\tau} m_0 u_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda\right) - \frac{q}{c}\frac{dA_\nu}{d\tau}$$

$\rightsquigarrow$ Minkowskikraft $K_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda\right) - \frac{q}{c}\frac{dA_\nu}{d\tau}$

5. Grenzen der Raumfahrt.

Inertialsystem S: nahezu unbeschleunigte Erde

S': Zur Zeit t momentane Geschwindigkeit $v(t)$ des Raumschiffs $\Rightarrow u'$ in S' momentan 0

Generell gilt $a \neq a'$ für die beiden Beschleunigungen

Wir fordern $a' = g = 981\ \mathrm{cm/sec^2}$.

Beschleunigungen: S' bewege sich mit konst. Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ in S:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} \quad \text{laut Additionstheorem}$$

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{Lorentztrafo}$$

mit Quotientenregel und $v = \text{const.}$:

$$du_x = \frac{du_x'}{1+\frac{u_x' v}{c^2}} - \frac{(u_x'+v)\frac{v}{c^2}du_x'}{\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)du_x' - (u_x'+v)\frac{v}{c^2}du_x'}{\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)^2} = \frac{1-v^2/c^2}{\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)^2}du_x'$$

$$dt = \frac{dt' + v/c^2\, dx'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\frac{v}{c^2}u_x'}{\sqrt{1-\beta^2}}dt'$$

$$\leadsto a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)^3}a_x'$$

u_x' verschwindet momentan in S': $a_x = (1-\beta^2)^{3/2} a_x'$

$\Rightarrow$ Im Erdsystem hat Raumschiff $a = (1-\beta^2)^{3/2} g \xrightarrow{v\to c} 0$

Separation der Variablen: $a = \frac{dv}{dt} = (1-\beta^2)^{3/2} g$

$$\frac{dv}{(1-\beta^2)^{3/2}} = g\,dt \qquad \text{Subst.: } x \equiv 1-\beta^2$$

$$\int_0^v \frac{dv}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \int_{1-v^2/c^2}^{1} \frac{c\,dx}{2x^{3/2}\sqrt{1-x}} = -c\left[\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right]_{1-v^2/c^2}^{1} = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = gt$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{vc}{g\sqrt{c^2-v^2}}$$

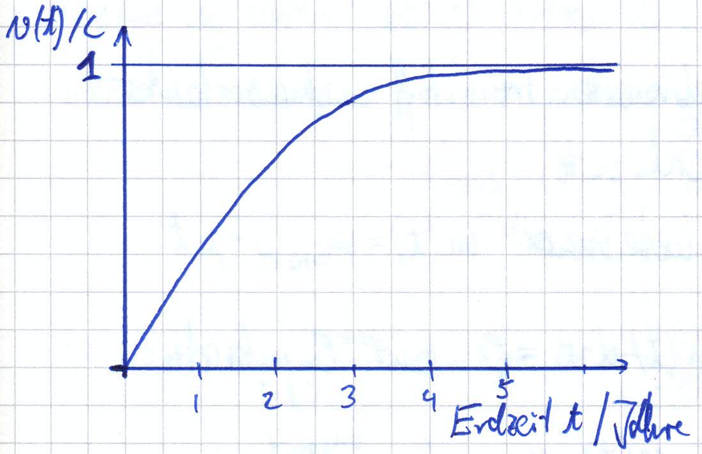
Ist $\frac{gt}{c} \ll 1$: $v(t) = gt$; $\frac{gt}{c} \gg 1 \leadsto v \approx c$

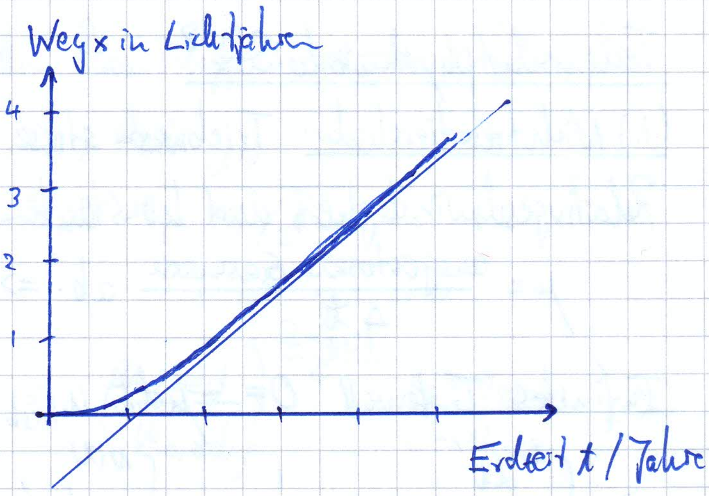
mit $v=\frac{dx}{dt}$ führt eine weitere Separation auf:

$$\frac{1}{g}\int_0^{x(t)} d\tilde{x} = \int_0^t \frac{\hat{t}\, d\hat{t}}{\sqrt{1+\frac{g^2}{c^2}\hat{t}^2}} = \frac{c^2}{g^2}\left[\sqrt{1+\frac{g^2}{c^2}\hat{t}^2}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}-1\right)}}$$ von Erde gemessene Flugstrecke in Erdzeit

$\frac{gt}{c} \ll 1$: $x(t) = \frac{gt^2}{2}$; $\frac{gt}{c} \gg 1$: $x \approx ct$





Für Astronauten vergeht während Flug die Eigenzeit

$$t_0 \equiv t' = \int_0^{t'} dt' \underset{\text{Zeitdilatation}}{=\!=} \int_0^t \sqrt{1-\left(\frac{v(\hat{t})}{c}\right)^2}\, d\hat{t} = \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{1+g^2\tilde{t}^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_0 = t' = \frac{c}{g}\ln\left(\frac{g}{c}t + \sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\right)}} \quad (*)$$ logarithmisch schwaches Anwachsen!

$\frac{gt}{c} \ll 1$: $t_0 \approx t$ wie es sein muss; $\frac{gt}{c} \gg 1$: $t_0 \approx \frac{c}{g}\ln\left(\frac{2gt}{c}\right)$.

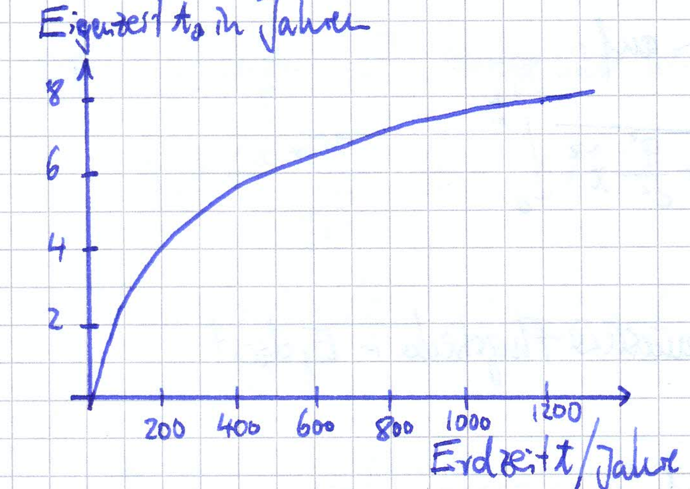
Auflösen von (*) nach t: $t = \frac{c}{g}\sinh\left(\frac{gt_0}{c}\right)$

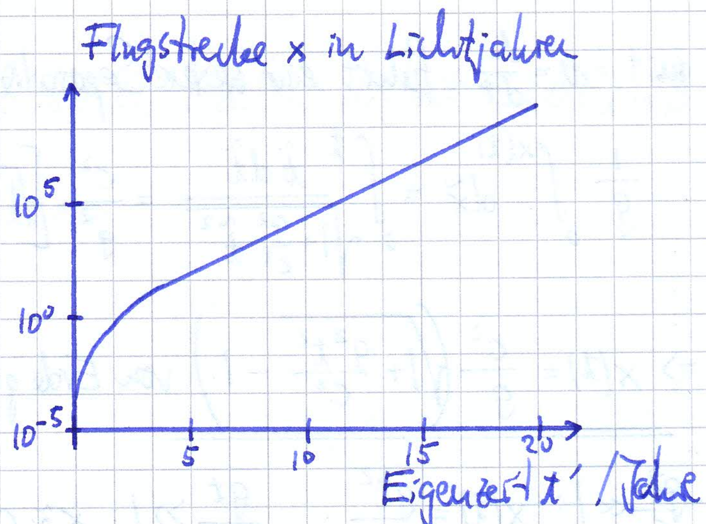
Einsetzen in $x(t)$ oben:

$$x(t_0) = \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{gt_0}{c}\right)-1\right]$$

Raumschiff kann in knapp 11 Eigenjahren ins Zentrum der Milchstrasse vorstossen, 24 Eigenjahre zum Andromedanebel. Bei letzterem Ereignis wäre die Erde aber $2.6\cdot10^6$ Jahre älter.

Aus biologischer Sicht sind interstellare Flüge ohne weiteres möglich.





<u>Technisch/physikalische Seite?</u>

<u>(1.) Nichtrelativistisch:</u> Triebwerk stosse abgebrannten Treibstoff mit konstanter Relativgeschwindigkeit und konstantem Durchsatz

$$\mu = \frac{\text{ausgestossene Gasmasse}}{\Delta t}$$ ab. ⇒ Raketenmasse $m(t) = m_{start} - \mu t$

Infinites. Intervall $0 = -\mu dt\, u_{treib} + m(t)\, dv = 0$ laut Impulssatz

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dt'}{m_{start} - \mu t'} = \frac{1}{\mu u_{treib}} \int_0^{v(t)} dv' \Rightarrow v(t) = u_{treib} \ln \frac{m_{start}}{m_{start} - \mu t}$$

$$v_{end} = u_{treib} \ln \frac{m_{start}}{m_{end}} \quad \text{und} \quad a(t) = \frac{u_{treib}\, \mu}{m_{start} - \mu t}.$$

<u>(2.) Relativistische Rechnung:</u> du' ist Geschwindigkeitszunahme im Inertialsystem S', welches im Erdsystem S die Geschwindigkeit v hat, und in dem das Raumschiff momentan ruht ($u' = 0$).

Impulserhaltung im System S': $0 = (\underbrace{m + dm}_{dm<0})\, du' - dm_{treib}\, u'_{treib} = \frac{(m_0 + dm_0)\, du'}{\sqrt{1-(du'/c)^2}} - \frac{dm_{0,treib}\, u'_{treib}}{\sqrt{1-(u'_{treib}/c)^2}}$

Wegen E-Bilanz ist $|dm_0| \neq$ Masse ausgestossener Treibstoff: $|dm_0| \neq dm_{0,treib}$.

E-Satz: $$m_0 c^2 = \frac{(m_0 + dm_0)\, c^2}{\sqrt{1-(du'/c)^2}} + \frac{dm_{0,treib}\, c^2}{\sqrt{1-(u'_{treib}/c)^2}}$$

Weglassen Terme höherer Ordnung: Impuls $$0 = m_0\, du' - \frac{dm_{0,treib}\, u'_{treib}}{\sqrt{1-(u'_{treib}/c)^2}}$$

E-Satz: $$m_0 c^2 = (m_0 + dm_0)\, c^2 + \frac{dm_{0,treib}\, c^2}{\sqrt{1-(u'_{treib}/c)^2}} \Rightarrow dm_0 = -\frac{dm_{0,treib}}{\sqrt{1-(u'_{treib}/c)^2}} < 0$$

Einsetzen in Impuls: $\underline{\underline{0 = m_0 du' + dm_0\, u'_{treib}}}$ (*) ähnlich nichtrelativist. Fall.

Geschwindigkeit im System S:

$$v + dv = \frac{du' + v}{1 + \frac{du' v}{c^2}} = (du' + v)\left(1 - \frac{du' v}{c^2}\right) \Rightarrow dv \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) du'$$

Mit (*) folgt $\quad -u'_{treib}\, dm_0 = \dfrac{m_0\, dv}{\left(1 - (v/c)^2\right)}$

Hierbei m_0 und u' bezogen System S', in dem Raumschiff momentan ruht

Variablentrennung:

$$-u'_{treib} \int_{m_{0,start}}^{m_{0,end}} \frac{dm_0}{m_0} = \int_0^{v_{end}} \frac{dv}{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow u'_{treib} \ln \frac{m_{0,start}}{m_{0,end}} = \frac{c}{2} \ln \frac{c + v_{end}}{c - v_{end}} \Rightarrow \left(\frac{m_{0,start}}{m_{0,end}}\right)^{\frac{2u'_{treib}}{c}} = \frac{c + v_{end}}{c - v_{end}}$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow v_{end} = c\, \frac{\left(\frac{m_{0,start}}{m_{0,end}}\right)^{\frac{2u'_{treib}}{c}} - 1}{\left(\frac{m_{0,start}}{m_{0,end}}\right)^{\frac{2u'_{treib}}{c}} + 1}}}\ (*)$$

unabh. vom zeitlichen Verlauf der Beschleunigung
$\Rightarrow$ gilt auch für $a' \neq$ const.

<u>Diskussion für $m_{0start} : m_{0end} = 10$</u>

- <u>Chemischer Antrieb</u>: Maximal erreichbar $u'_{treib} = 10$ km/sec $\Rightarrow$ aus (*): $v_{end} \approx 23$ km/sec erreicht nach ≈ 40 min, danach antriebsfrei: 8 Jahre bis Rand Sonnensystem, 56,000 bis α centauri
- <u>Fusionsantrieb</u>: bei diesem futuristischen Antrieb werden aus 2 Protonen und 2 Neutronen He-Atomkerne gebildet, 28 MeV pro Fusion freigesetzt. Annahme: diese Energie vollst. auf das nach hinten gestossene He übertragen $\Rightarrow$ Abgasgeschwindigkeit des Treibstoffs:
  $28\,\text{MeV} = 4.5 \cdot 10^{-12}\,\text{J} = m_{He} c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u'_{treib}}{c}\right)^2}} - 1\right) \Rightarrow u'_{treib} \approx 36.500$ km/sec

$\Rightarrow v_{end} \approx 82.000$ km/sec erreicht nach 100.5 Erdtagen bzw. 99.2 Raumschifftage und Strecke 0.04 Lichtjahre. Danach antriebsfrei: 15.2 Jahre Erdzeit bis α centauri.