$$\Rightarrow \quad t - t_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} \left(\arccos \frac{r-a}{a\varepsilon} \pm \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{r-a}{a\varepsilon}\right)^2} \right)$$

Definiert $t = t(r)$ und damit $r = r(t)$. Die Umkehrfunktion kann aber nicht analytisch gebildet werden.

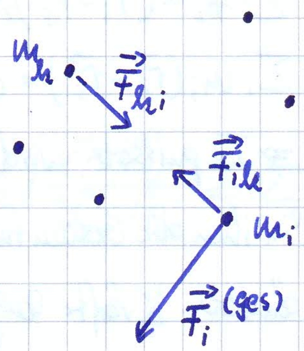
Eine Umlaufszeit T führt zu gleichem Wert für r, der arc cos ist um 2π gewachsen

$\Rightarrow$ voriges Resultat $T = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{\gamma M}$.

Durch Einsetzen von $r = r(\varphi)$ in $t = t(r)$, so erhält man eine entsprechende Gleichung für $t = t(\varphi)$.

II. Mechanik der Punktsysteme; Prinzipien der Mechanik.

1.) Das Punktsystem und die darauf wirkenden Kräfte



Endliche Anzahl von Massenpunkten. Im Inertialsystem lauten die Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec r}_i = \vec F_i^{(ges)}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Punktsysteme: spalte die Kraft auf in eine äussere Kraft, die nicht von den anderen Massenpunkten herrührt, und eine innere Kraft: $\vec F_i^{(ges)} = \vec F_i^{(äussere)} + \vec F_i^{(innere)}$

Bsp.: Innere Kräfte = Kräfte zw. den Atomen des Körpers, äussere = Schwerkraft.

Hierbei setzt sich die innere Kraft aus den paarweisen Kräften zusammen: $\vec F_i^{(innere)} = \sum_k \vec F_{ik}$ und es gilt $\vec F_{ii} = 0$. Aus dem 3. Newtonaxiom gilt $\vec F_{ik} = -\vec F_{ki}$

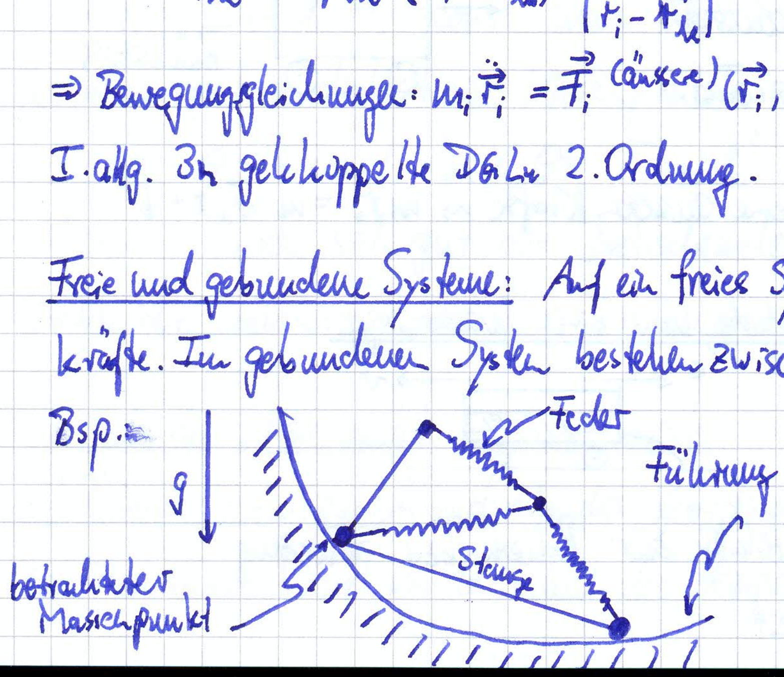
Wir betrachten Systeme, wo die Kräfte nur von $\vec r_i - \vec r_k$ abhängen und Zentralkräfte sind: $\vec F_{ik} = f_{ik}(\vec r_i - \vec r_k) \dfrac{\vec r_i - \vec r_k}{|\vec r_i - \vec r_k|}$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec r}_i = \vec F_i^{(äussere)}(\vec r_i, \dot{\vec r}_i, t) + \sum_{k=1}^{n} \vec F_{ik}(\vec r_i - \vec r_k)$.

I. allg. $3n$ gekoppelte DGLn 2. Ordnung.

Freie und gebundene Systeme: Auf ein freies System wirken keine zusätzlichen Zwangskräfte. Im gebundenen System bestehen zwischen $\vec r_i$ und $\vec r_k$ Bedingungsgleichungen.

Bsp.:



$\vec F^{(e,ä)}$ Schwerkraft: äussere eingeprägte Kraft

$\vec F^{\prime(ä)}$ Äussere Führung: äussere Zwangskraft

$\vec F^{\prime(i)}$ Starre Stange: innere Zwangskraft

$\vec F^{(e,i)}$ Federn: innere eingeprägte Kraft

2.) Impulssatz und Schwerpunktsatz:

Addition aller Bewegungsgleichungen: $\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik}$

Wegen $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$: $\underline{\frac{d}{dt} \vec{p}_{ges} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i^n \vec{F}_i = \vec{F}^{(ges)}}$

Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äusseren Kräfte.

Schwerpunkt: $\vec{r}_0 = \frac{\sum_i^n m_i \vec{r}_i}{\underbrace{\sum m_i}_{=m}} \xrightarrow[\text{Vertlg.}]{\text{kontin.}} \frac{\int \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}}{\int \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}}$

Dieser Massenmittelpunkt ist tatsächlich der Schwerpunkt (Punkt, für den sich das Gesamtsystem nicht dreht, wenn dort das System aufgestützt wird): Ist $\vec{r}_s$ der Schwerpunkt, so muss auf ihn bezogen das Gesamtdrehmoment verschwinden:

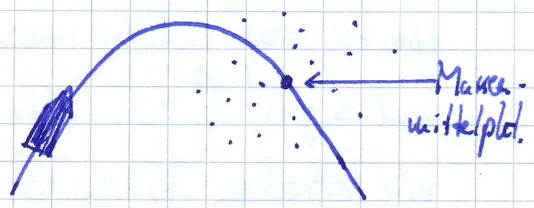
$\sum_i \vec{F}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_s) = \vec{g} \times \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_s) \overset{!}{=} 0$ Da Richtung von $\vec{g}$ beliebig $\Rightarrow$

$\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_s) = 0 \Rightarrow \vec{r}_s = \vec{r}_0$.

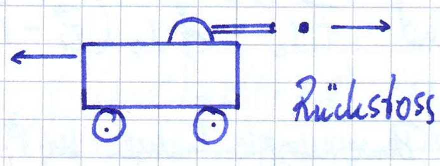
$\Rightarrow$ Impulssatz wird zu $m \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}^{(ges)}$. Der Massenmittelpunkt bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse des Systems vereinigt wäre und in ihm die Summe aller äusseren Kräfte angreifen würde.

Bsp.: Im Schwerefeld $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ gilt $m \ddot{\vec{r}}_0 = m\vec{g} \rightsquigarrow r_0(t) = \frac{1}{2} \vec{g} (t-t_0)^2 + \vec{v}_0 (t-t_0) + \vec{r}_0(t_0)$

Der Massenmittelpunkt bewegt sich auf einer Parabel, gleichgültig, wie gross die inneren Kräfte sind. z. Bsp. explodierende Granate:

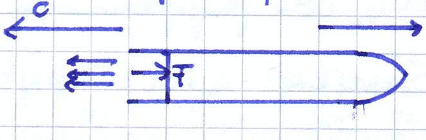


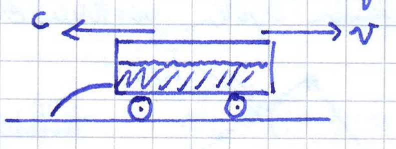
$\vec{F} = 0$: Ist die Resultierende aller äusseren Kräfte null, so gilt $m \dot{\vec{r}}_0 = \vec{p}_{ges} = \overrightarrow{const}$.



Abgeschlossenes System: Es wirken keine äusseren Kräfte $\rightsquigarrow m \vec{r}_0 = m \vec{v}_0 t + \vec{b}$

Anwendung des Impulssatzes auf eine Rakete bzw. einen Wasserwagen:





c: Austrittsgeschwindigkeit der Teilchen relativ zur Rakete bzw. Fahrzeug

$\mu = -\dot{m}$ Ausfluss an Masse pro Zeit

Impulssatz: $p_{ges} = mv + \int^t \mu(v-c)\,dt \therefore \mu(v-c) = \left\{\begin{array}{l}\text{Impuls der pro Zeit austretenden} \\ \text{Teilchen im Ruhesystem}\end{array}\right\}$

$$\frac{dp_{ges}}{dt} = \frac{d}{dt} mv + \mu(v-c) = 0 \quad \text{(keine äusseren Kräfte)}$$

$$\Rightarrow \dot m v + m\dot v + \mu(v-c) = -\mu v + m\dot v + \mu(v-c) = 0 \Rightarrow \underline{m\dot v = \mu c}$$

<u>3.) Drehimpulssatz</u> Analog Herleitung beim Massepunkt.

$$\vec r_i \times | \quad m_i \ddot{\vec r}_i = \vec F_i + \sum_k \vec F_{ik} \rightsquigarrow m_i \vec r_i \times \ddot{\vec r}_i = \frac{d}{dt}(m_i \vec r_i \times \dot{\vec r}_i) = \vec r_i \times \vec F_i + \sum_k \vec r_i \times \vec F_{ik}$$

Summiert über alle Massepunkte: $\frac{d}{dt} \sum_i m_i(\vec r_i \times \dot{\vec r}_i) = \sum_i \vec r_i \times \vec F_i + \sum_{i,k} \vec r_i \times \vec F_{ik}$

Umformen der Doppelsumme: $\sum_{i,k} \vec r_i \times \vec F_{ik} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i,k} \vec r_i \times \vec F_{ik} + \underbrace{\sum_{i,k} \vec r_k}_{\text{Vertauschung der Summationsindizes}} \times \underbrace{\vec F_{ki}}_{-\vec F_{ik}}\Big)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\vec r_i - \vec r_k) \times \vec F_{ik}$$

Sind die inneren Kräfte Zentralkräfte der Form $\vec F_{ik} = f_{ik}(\vec r_i - \vec r_k)\frac{\vec r_i - \vec r_k}{|\vec r_i - \vec r_k|} \Rightarrow \sum_{i,k} = 0$

Gesamtdrehimpuls: $\vec N = \sum_i \vec N_i = \sum_i m_i(\vec r_i \times \dot{\vec r}_i)$

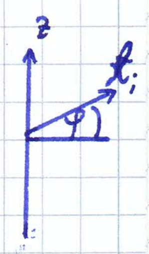
Gesamtdrehmoment: $\vec M = \sum_i \vec M_i = \sum_i \vec r_i \times \vec F_i$

$\Rightarrow \underline{\dot{\vec N} = \vec M}$ Die zeitl. Ableitung des Gesamtdrehimpulses entspricht dem resultierenden Moment der äusseren Kräfte.

Erg. für ebene Polark.

Beim abgeschlossenen System (keine äusseren Kräfte): $\vec N = \vec c = \vec{const}$.

In Zylinderkoordinaten (z-Achse ∥ Drehachse): $(\vec r_i \times \dot{\vec r}_i)_z = x_i \dot y_i - y_i \dot x_i = l_i^2 \dot\varphi_i$



$\Rightarrow N_z = \sum m_i l_i^2 \dot\varphi_i = const.$ wenn $M_z = 0$

Sei Winkelgeschwindigkeit aller Massenpunkte identisch: $\dot\varphi_i = \omega$

$\Rightarrow N_z = \Theta\omega = const.$ mit $\Theta \equiv \sum m_i l_i^2$ Trägheitsmoment bezügl. z-Achse.

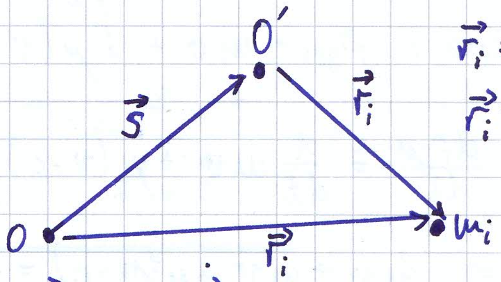
$\Rightarrow$ Damit lassen sich gut die Drehschemelexperimente erklären (z.Bsp. beim Drehen die Hände ausstrecken $\Rightarrow$ Drehung verlangsamt; vgl. Pirouetten).

<u>Die Rolle des Schwerpunkts beim Drehimpuls</u>

<u>a.) Ruhende Bezugspunkte und ruhendes Koordinatensystem</u>

Der Drehimpuls hängt von der Wahl des Bezugspunktes ab:

$$\vec N_0 = \sum_i m_i \vec r_i \times \dot{\vec r}_i = \vec N$$
$$\vec N_{0'} = \sum m_i \vec r_i{}' \times \dot{\vec r}_i{}' \equiv \vec N'$$



$\vec r_i = \vec s + \vec r_i{}'$

$\vec r_i{}' = \vec r_i - \vec s$

O' & O sollen ruhen: $\dot{\vec s} = 0$:

$$\dot{\vec r}_i{}' = \dot{\vec r}_i \Rightarrow \vec N' = \sum m_i(\vec r_i - \vec s) \times \dot{\vec r}_i = \vec N - \vec s \times \underbrace{\sum m_i \dot{\vec r}_i}_{m\,\dot{\vec r}_\odot}$$

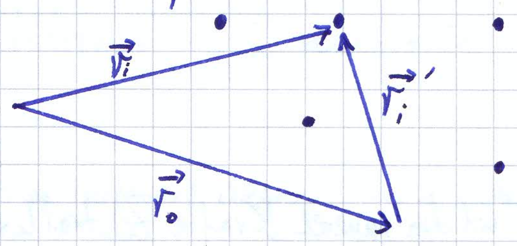
$\sum_i m_i \to m$, $\dot{\vec r}_\odot \leftarrow$ Schwerpunkt

$$\vec N' = \vec N - m(\vec s \times \dot{\vec r}_\odot)$$

Ruht der Schwerpunkt oder ist $\vec r_\odot = 0$, so ist Drehimpuls bezugssystemunabhängig.

b.) Mit dem Schwerpunkt mitbewegtes System: Wähle ein Koordinatensystem, dessen Ursprung der Schwerpunkt ist, und dessen Achsen parallel sind zu denen des Inertialsystems:

$$\vec r_i = \vec r_0 + \vec r_i{}'$$
$$\vec r_i{}' = \vec r_i - \vec r_0$$



Wir haben: $\sum_i m_i(\vec r_i - \vec r_0) = \sum m_i \vec r_i{}' = 0$

$$\sum_i m_i \dot{\vec r}_i{}' = 0, \quad \sum m_i \ddot{\vec r}_i{}' = 0$$

Im ruhenden System: $\sum m_i \vec r_i \times \ddot{\vec r}_i = \sum \vec r_i \times \vec F_i$

$$\rightsquigarrow \sum m_i(\vec r_0 + \vec r_i{}') \times (\ddot{\vec r}_0 + \ddot{\vec r}_i{}') = \sum (\vec r_0 + \vec r_i{}') \times \vec F_i$$

oder $\sum m_i \vec r_0 \times \ddot{\vec r}_0 + \sum m_i \vec r_i{}' \times \ddot{\vec r}_0 + \vec r_0 \times \sum m_i \ddot{\vec r}_i{}' + \sum m_i \vec r_i{}' \times \ddot{\vec r}_i{}' = \vec r_0 \times \overbrace{\sum \vec F_i}^{\vec F} + \sum \vec r_i{}' \times \vec F_i$

Nach Schwerpunktssatz: $m\ddot{\vec r}_0 = \vec F = \sum \vec F_i \wedge \vec r_0 \times (m\ddot{\vec r}_0 - \vec F) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum m_i \vec r_i{}' \times \dot{\vec r}_i{}' = \sum_i \vec r_i{}' \times \vec F_i$$

Ist äussere Kraft ~~konstant~~ $\cancel{\sim (\sum \vec F_i) \times}$ $\vec F_i = m_i \vec g \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum m_i \vec r_i{}' \times \dot{\vec r}_i{}' = (\sum_i m_i \vec r_i{}') \times \vec g$

$\rightsquigarrow$ Im Schwerpunktssystem ist Drehimpuls konstant.

4.) Energiesatz, die zehn Integrale der Bewegungsgleichungen. Energiesatz gilt, wenn Kräfte konservativ sind, d.h., wenn die i. Kraft

(i.) $\vec F_i^{ges} = \vec F_i^{ges}(\vec r_1, \vec r_2, \dots, \vec r_n)$ nur Funktion der n Massenpunkte ist $\wedge$

(ii.) $\vec F_i^{ges} = -\nabla_i V(\vec r_1, \vec r_2, \dots, \vec r_n)$: $F_{ix}^{ges} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ ...

Bew.: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{ges} = -\nabla_i V \quad | \cdot \dot{\vec{r}}_i \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \dot{\vec{r}}_i$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z_n} \dot{z}_n \right) = -\frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V = T + V = E_{ges} = const.}}$$

<u>Aufspaltung der kinetischen Energie</u> $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum m_i \frac{\dot{\vec{r}}_0^{\,2}}{2} + \overbrace{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i{}' \dot{\vec{r}}_0}^{\equiv 0} + \sum m_i \frac{\dot{\vec{r}}_i{}'^{\,2}}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_0^{\,2} + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i{}'^{\,2}}}$ Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie des Schwerpunkts plus der kinet. E. der Teile des Systems relativ zum Schwerpunkt.

<u>Die zehn Integrale der Bewegung beim abgeschlossenen System.</u>

Impulssatz:	$\sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{a} t + \vec{b}$	6 unabh. Konstante = "Integrale d. Bewgg."
Drehimpulssatz:	$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{C}$	3
Energiesatz:	$T + V^{(innere)} = E^{ges}$	1
		10 Integrale der Bewegung

*** EINSCHUB *** S.60

<u>5.) D'Alembertsches Prinzip und Lagrangegleichungen.</u>

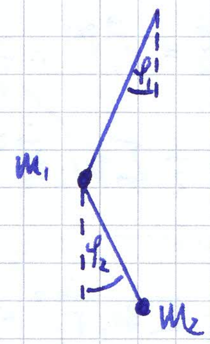
Gleichgewicht existiert, wenn virtuelle Arbeit $\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Die virtuellen Verrückungen müssen so gewählt sein, dass sie mit den Zwangskräften konsistent sind. Spalten wir die Kraft $\vec{F} = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i{}'$ in äussere & Zwangskraft auf, so muss $\sum \vec{F}_i^{ext} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{F}_i{}' \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Wir nehmen nun an, dass $\vec{F}_i' \delta \vec{r}_i = 0$ (z. Bsp. keine Reibung).

Prinzip der virtuellen Arbeit: $\sum \vec{F}_i^{ext} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$.

<u>Transformation der Koordinaten:</u> Die Zwangsbedingung koppelt die Koordinaten $\vec{r}_i$: $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) = 0$. Haben wir k holonome Zwangsbedingungen, so erhalten wir $3N-k$ unabhängige Koordinaten. Diese nennen wir q_i. Das System q_i beschreibt dann die $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t)$ so, dass sie die Zwangsbed. implizit enthalten.

Bsp.: Bewegung auf Kugel: zwei Winkel

Doppelpendel: zwei Auslenkungswinkel φ_1, φ_2:



Ist das System nicht im Gleichgewicht, so wenden wir das d'Alembertsche Prinzip an:

Gleichgewicht herrscht, wenn $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i - \vec{F}_i^* = 0$ wobei $\vec{F}_i^*$ die d'Alembert Trägheitskraft ist

$\Rightarrow$ Das System ist durch $\sum(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = \sum(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i + \sum \vec{F}_i{}'\cdot\delta\vec{r}_i = 0$ bestimmt. Wir betrachten wieder Systeme, für die die Zwangskraft $\cdot\,\delta\vec{r}_i = 0$:

$\Rightarrow$ D'Alembertsches Prinzip: $\underline{\sum(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0}$ wobei wir das Superskript weglassen.

Die Zwangskräfte treten nicht mehr auf, aber die Koordinaten sind abh. voneinander.

$\rightsquigarrow$ Wir drücken die $\vec{r}_i$ über die n unabhängigen Koordinaten q_i aus:

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \rightsquigarrow \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$ und $\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

$\Rightarrow$ Die virtuelle Arbeit wird zu $\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i,j}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \equiv \sum_j Q_j\,\delta q_j$

mit den Komponenten Q_j der generalisierten Kraft: $Q_j = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$

Bem.: Die Dimension von q_i und Q_i sind nicht notwendig Länge und Kraft, aber die von $\delta q_i \cdot Q_i$ ist die einer Arbeit.

2. Term im d'Alembertprinzip: $\sum\dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

Es gilt aber $\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i\left(\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m\dot{\vec{r}}_i\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)}\right)$

$$= \sum_k \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_j\partial t}$$

$$= \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}$$

Ausserdem gilt $\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$

$\Rightarrow \sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i\left(\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\right)$

Somit: $\sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 \right\} \delta q_j = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i$

Mit $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ bekommen wir für das d'Alembertsche Prinzip:

$$\sum_j \left(\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right) \cdot \delta q_j = 0.$$

Holonome Zwangsbed. $\Rightarrow q_j$ unabhängig $\Rightarrow \delta q_j$ unabhängig von δq_k $\Rightarrow$ einzelne Koeffiziente müssen verschwinden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Konservative Kräfte: $\vec{F}_i = -\nabla_i V \Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i - \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Das ist aber genau die partielle Ableitung der Funktion $-V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ nach q_j:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \text{(konservatives System)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$ V ist aber von den $\dot{q}_j$ unabhängig:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0.$$ Mit $L = T - V$ Lagrangefunktion erhalten wir

die Lagrangeschen Gleichungen: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$

Vorteile der Formulierung durch Lagrange-Gleichungen:
- Zwangskräfte treten nicht auf
- Formulierung mit zwei skalaren Funktionen anstelle vektorieller Gln.

Kinet. Energie: $T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = a + \sum_j a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$

mit: $a = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$, $a_j = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$a_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

Bsp.: (1.) Bewegung eines freien Massenpunkts

(a.) kartes. Koordinaten: $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$; verallg. Kräfte F_x, F_y, F_z:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgln.: $\frac{d}{dt}(m\dot{x})=F_x,\ \frac{d}{dt}(m\dot{y})=F_y;\ \frac{d}{dt}(m\dot{z})=F_z$ Newtonglн.

(b.) Polarkoordinaten: $x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi \wedge \dot{x}=\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi$

$\dot{y}=\dot{r}\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2\right);\ \frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\varphi}^2;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}$$

Verallg. Kräfte: $Q_r=\vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}=\vec{F}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=F_r$

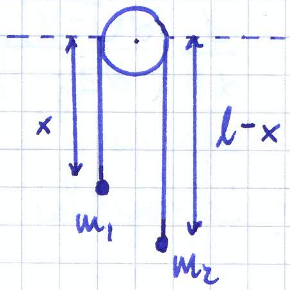
$$Q_\varphi=\vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}=\vec{F}\cdot|\vec{r}|\,\vec{e}_\varphi=rF_\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)=m\ddot{r} \rightsquigarrow m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2=F_r$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=mr^2\ddot{\varphi}+2mr\dot{r}\dot{\varphi} \rightsquigarrow \underbrace{mr^2\ddot{\varphi}+2mr\dot{r}\dot{\varphi}}_{\frac{d}{dt}\text{ Drehimpuls}}=\underbrace{rF_\varphi}_{\text{Drehmoment}}$$

(2.) Atwoodsche Fallmaschine: holonome skleronome Zwangsbed.

(Seillänge l): 1 unabh. Koordinate x

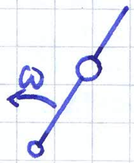


$\rightsquigarrow V=-m_1gx-m_2g(l-x);\ T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2$

$$\Rightarrow L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+m_1gx+m_2g(l-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=(m_1-m_2)g;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x} \rightsquigarrow (m_1+m_2)\ddot{x}=(m_1-m_2)g \text{ oder } \ddot{x}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g.$$

(3.) Gleitende Perle auf rotierendem Draht:



Hier enthalten die Transformationsgln. die Zeit explizit:

$x=r\cos\omega t;\ y=r\sin\omega t$

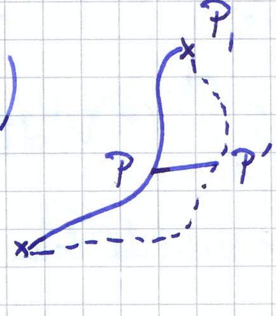
Unser Ausdruck für T liefert: $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2)$ (nicht homogen vom Grad 2!)

Kräftefreier Raum: $F=0 \rightsquigarrow m\ddot{r}-mr\omega^2=0$ oder $m\ddot{r}=mr\omega^2$

Bewegung nach außen durch Zentrifugalbeschleunigung.

6.) Das Hamiltonsche Prinzip

D'Alembert = "Differentialprinzip"; Hamilton: "Integralprinzip". Ein System von n Massenpunkten sei zur Zeit t_0 in der Lage $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{3n}^0)$ und zur Zeit t_1 in $(x_1', x_2', \dots, x_{3n}')$. Dazwischen liegt die wirkliche Bahn. Wir vergleichen diese Bahn mit einer zweiten, wobei der Punkt $P(x_1, x_2, \dots, x_{3n})$ dem Punkt $P'(x_1', x_2', \dots, x_{3n}')$ zugeordnet wird, so



dass beide zur gleichen Zeit passiert werden: $x_i = x_i(t) \leftrightarrow x_i' = x_i'(t)$. Zu den Zeiten t_0 und t_1 sind beide Bahnen in x_i^0 bzw. x_i^1.

$\rightsquigarrow$ Koordinatenvariation $\delta x_i \equiv x_i' - x_i$ erfüllt:

$$\delta t = 0, \quad \delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1) = 0; \quad \delta x_i(t) = x_i'(t) - x_i(t).$$

Die δx_i selbst sind Funktionen der Zeit. Für jedes x_i (kurz x) gilt:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt} = \dot{x}'(t) - \dot{x}(t) = \delta \dot{x} \equiv \delta \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\delta x = \delta \frac{dx}{dt} = \delta \dot{x}$$

Die Operatoren d/dt und δ dürfen vertauscht werden, da $\delta t = 0$.

Variation der Funktion $\phi(x_1, x_2, \dots, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, t)$: Differenz auf wirkl. & variierter Bahn

$\phi(x_1 + \delta x_1, \dots, \frac{d}{dt}(x_1 + \delta x_1), \dots, t) - \phi(x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, t)$ Betrachte linearen Taylorterm ($\delta^2 \ll 1$)

$$\Rightarrow \delta\phi = \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right)$$

Betrachte nun d'Alembertsches Prinzip: $\sum (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0$. Für jedes $x_i = x$ gilt:

$$\ddot{x}\,\delta x = \frac{d}{dt}(\dot{x}\,\delta x) - \dot{x}\frac{d}{dt}\delta x = \frac{d}{dt}(\dot{x}\,\delta x) - \dot{x}\,\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\,\delta x) - \delta\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2\right)$$

$$\Rightarrow \sum m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i - \delta \sum \tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

mit d'Alembert folgt also $\frac{d}{dt} \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i = \delta \sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \sum F_i \delta x_i \equiv \delta T + \delta' A$

"Lagrangesche Zentralgleichung". δT & $\delta' A$ sind Variation der kinet. Energie und äussere Kräfte

Integration nach Zeit: $\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' A)\,dt = \left[\sum m_i \dot{x}_i \delta x_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0$ ($\delta x = 0$ in $t_0 \wedge t_1$)

$\Rightarrow$ verallgemeinertes Hamiltonsches Prinzip: $\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' A)\,dt = 0.$

Konservative Kräfte: $\delta' A = \sum F_i \delta x_i = -\sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta V$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \delta (T-V)\,dt = 0$. Da δ nicht auf Integrationsgrenzen wirkt, schreiben wir

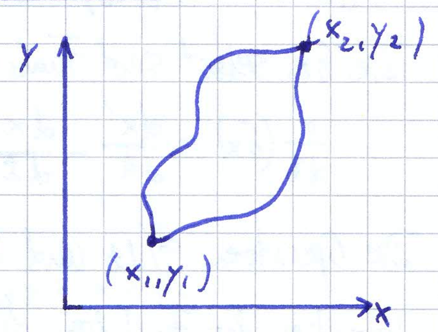
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T-V)\,dt = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0 \;:\; L = T-V$$

Die wirkliche Bahn hat das Integral einen stationären Wert (Extremum od. Sattelpkt.)

Hamiltonsches Prinzip: Bei konservativen Systemen ist für die zwischen zwei gegebenen Lagen des Systems wirklich eintretende Bahn das Zeitintegral der Lagrangeschen Funktion stationär:

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \text{Extremum}$$

7.) Die Grundaufgabe der Variationsrechnung.



Aufgabe: Bestimme Weg $y = y(x)$ zwischen $y_1 = y(x_1)$ und $y_2 = y(x_2)$ so, dass

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\,dx \;:\; \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

ein Extremum besitzt.

Schreiben wir $y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\,\eta(x)$ so dass für $\alpha = 0$ I ein Maximum habe. Dabei ist $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x)\,dx$$

und wir fordern nun $\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$ und es ist $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right) dx$

Dabei ist $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \alpha}\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\,dx$

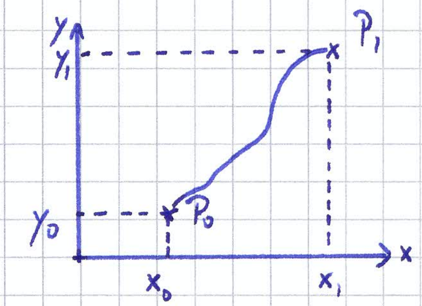
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\,dx = \int_{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\eta(x)\,dx \overset{!}{=} 0$$

$\eta(x)$ beliebig $\Rightarrow$ Eulersche oder Euler-Lagrangesche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Identifizier wir x mit t und betrachten statt y das Koordinatensystem x_i, so gilt analog $\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ähnlich unserer Lagrangegln.

Bsp.: (1.) Kürzeste Verbindung zw. zwei Punkten.



$$I = \int_{P_0}^{P_1} ds = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

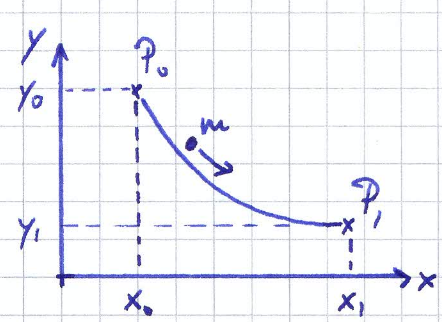
$f(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad \therefore \; y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \text{const.} \rightsquigarrow \dot{y} = a = \text{const.}$ allg. Lösung $y = ax + b$

Mit Randbed.: $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$.

(2.) **Brachystochronenproblem:** $y(x)$ soll zwei Punkte in einer senkrechten Ebene so verbinden, dass m unter Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit von P_0 nach P_1 gelangt.



$$\text{Gesamtzeit} = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{v} dx \stackrel{!}{=} \text{Extremum}$$

E-Satz: $\frac{m}{2}v^2 + mgy = E$, ist $v(x_0) = 0$ und $E = mgy_0 \Rightarrow v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$

$$\Rightarrow T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y_0 - y}}\, dx \rightsquigarrow f(y, \dot{y}, x) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y_0-y}}$$

Man erhält die Zykloidengleichung $x = \frac{A^2}{2}(\varphi + \sin\varphi) + B$

$y = -\frac{A^2}{2}(1 + \cos\varphi)$ in parametr. Darst.

(3.) Seil unter dem Einfluss der Schwerkraft $\rightarrow$ Kettenlinie

Hamiltonsches Prinzip: Die Forderung $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \text{Extremum}$ mit $L = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{x}_i^2 - V(x_1, \ldots)$ führt auf die Eulergleichungen

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \text{ oder } m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \text{ Newtongln.}$$

Im Falle einer Zwangsbedingung führe die generalisierte Koordinate auf unsere vorigen Euler-Lagrangegleichungen.

8.) Hamiltonsche oder kanonische Bewegungsgleichungen, Hamiltonfunktion.

Es gelten holonome skleronome Bedingungen und es existiere eine Lagrangefunktion, deren Eulersche Gleichungen die Bewegungsgleichungen sind:

$$L = L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, q_1, \dots, q_f, t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall\, i = 1, 2, \dots, f$$

Generalisierter Impuls: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Bei kartes. Koordinaten gleich dem gewöhnlichen Impuls: $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V \rightsquigarrow p = \nabla_{\dot{\vec{r}}} L = m\dot{\vec{r}}$

Die p_i sind Funktionen der $\dot{q}_i, q$, und t: $p_i = p_i(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, q_1, \dots, q_f, t) \equiv p_i \underbrace{(\dot{q}, q, t)}_{\text{Kurzschreibweise}}$

Die generalisierten Geschwindigkeiten können dann als Funktion der p und q ausgedrückt werden: $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q, t)$

Wie ersetzt man nun mathematisch konsistent die $\dot{q}_i$ durch die p_i?

<u>Legendretransformation</u>: Betrachte Funktion $f(x,y)$ mit Differential $df = u\,dx + v\,dy$ wobei $u = \partial f/\partial x$ und $v = \partial f/\partial y$. Wir wollen nun auf die unabhängigen Variablen u, y übergehen, so dass differentielle Grössen durch die Differentiale du und dy ausgedrückt werden können. Sei g eine Funktion von u und y, definiert durch

$$g = f - ux \rightsquigarrow dg = df - u\,dx - x\,du = u\,dx + v\,dy - u\,dx - x\,du = v\,dy - x\,du$$

$\Rightarrow$ x und y sind also nun Funktionen der Variablen u und y, die durch

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{gegeben sind.}$$

Die Transformation $g = f - ux$ ist eine Legendretrafo, die oft in der Thermodynamik auftritt. Zum Beispiel ist die Enthalpie H eine Funktion der Entropie S und des Druckes p: $\frac{\partial H}{\partial S} = T$, $\frac{\partial H}{\partial p} = V$ und $dH = T\,dS + V\,dp$ praktisch für die Betrachtung isentropischer und isobarer Prozesse. Für isotherme und isobare Prozesse sind aber die Zustandsgrossen T und p praktischer:

$$G = H - TS \rightsquigarrow dG = -S\,dT + p\,dV \quad \text{Gibbssche Freie Energie.}$$

Legendretrafo von L bezügl. der $\dot{q}$. Definiere (Vorzeichen!) die Hamiltonsche Funktion

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \qquad (*)$$

Damit haben wir H als Funktion der p, q, t gefunden, so dass das Differential ergibt:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (**)$$

Aus ~~Einsetzen von~~ $(*)$: $dH = \sum \dot q_i dp_i + \sum p_i d\dot q_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$

Durch Definition des generalisierten Impulses heben sich die folgenden Terme auf:

$$\sum p_i d\dot q_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i = \sum \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) d\dot q_i \equiv 0.$$

Aus Lagrangegl.: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot p_i$

$\Rightarrow dH = \sum \dot q_i dp_i - \sum \dot p_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

Vergleich mit $(**)$: $\underbrace{\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}}_{\text{Hamiltonsche oder kanonische Gleichungen}}.$

$\Rightarrow$ Satz von $2n$ Bewegungsgleichungen 1. Ordnung.

<u>Physikalische Bedeutung der Hamiltonfkt:</u> Lassen sich die Kräfte aus einem Potential herleiten, so gilt $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot q_j \dot q_k$ und $V = V(q,t)$:

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} \dot q_i = \sum \frac{\partial(T - V(q,t))}{\partial \dot q_i} \dot q_i = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i = \sum p_i \dot q_i$$

$\Rightarrow \underline{H} = \sum p_i \dot q_i - L = 2T - (T - V) = \underline{T + V}$

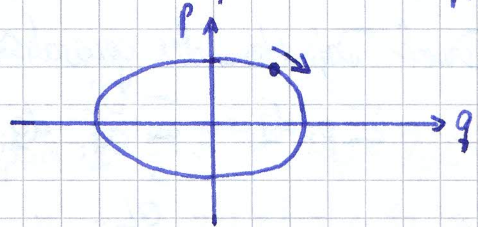
Die Hamiltonfkt. in einem solchen System ist gleich der Gesamtenergie. H folgt also, indem man in der Gesamtenergie die generalisierte Koordinate durch die dazugehörigen Impulse ersetzt.

Änderung der Gesamtenergie: $\frac{dH}{dt} = \underbrace{\sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot q_i\right)}_{\dot q_i \dot p_i - \dot p_i \dot q_i = 0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$

Konservative Systeme: $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ Energiesatz $H = E =$ const.

Die $2n$ Hamiltonschen Gleichungen 1. Ordnung sind den n Lagrangegleichungen 2. Ordnung äquivalent. Wegen ihrer Symmetrie können sie aber bei vielen Problemen vorteilhafter angewandt werden. Kanonisch heisst regelmässig. p_i wird zu q_i kanonisch konjugierter Impuls genannt. Die p, q sind die kanonischen Variablen.

<u>Phasenraum und Phasenbahn:</u> Der Phasenraum wird durch die 2f Koordinaten q, p aufgespannt. Die Bewegung $q_i(t), p_i(t)$ ist dann eine sog. Phasenbahn. Gilt $H(p,q) = const.$, so ist die Bahnkurve eine Ellipse.



<u>Zyklische Koordinate:</u> q_k ist zyklisch, wenn sie in L bzw. H nicht explizit auftritt. Der konjugierte Impuls ist konstant: $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \leadsto p_k = const.$

<u>Invarianzeigenschaften von H und Erhaltungssätze:</u>

<u>(1.) Homogenität des Ortes:</u> Ändert sich bei einer Verschiebung aller Teilchen H nicht, dann ist der Gesamtimpuls in der Verschiebungsrichtung konstant. z. Bsp. Translation in x: $H(p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, p_{2x}, \dots; q_{1x}+a, q_{1y}, q_{1z}, q_{2x}+a, \dots) = H(p_{1x}, p_{1y}, \dots, q_{1x}, \dots)$

$$\cancel{\leadsto \frac{\partial H}{\partial q_{1x}} + \frac{\partial H}{\partial q_{2x}} + \dots =} \quad \delta H = H - H_{|a=0} \underset{\text{Taylor}}{=} a \sum \frac{\partial H}{\partial q_{ix}} + O(a^2) \xrightarrow{a \to 0} 0$$

$$\Rightarrow -\sum \dot{p}_{ix} = 0 \leadsto \sum p_{ix} = P_x = 0.$$

<u>(2.) Homogenität der Zeit:</u> Hängt H nicht explizit von der Zeit ab $\leadsto \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \leadsto H = E = const.$

<u>(3.) Isotropie des Raumes = Homogenität der Richtung:</u> Drehimpulserhalt (ohne Bew.)

<u>Relativistische Verallgemeinerung:</u> im elektromagnet. Vektorpotential $\vec{A}$ und mit $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ folgt $L = m_0 c^2 \left[1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right] + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} - e\phi$ ← Skalarpot.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(v)\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \quad \text{bzw.} \quad \vec{p} = m(v)\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

folgt nach Rechnung $H = c\sqrt{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2 + e\phi$

Kanon. Gl.: $\frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\left(\vec{E} + \vec{v}/c \times \vec{B}\right)$ relativist. korrekte Bewegungsgl.

Zeitliche Änderung einer Funktion $f(p,q,t)$ und Poissonklammern:

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \left[-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Def. der Poissonklammer: $\{f,g\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

Es gilt also: $\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{dH}{dt} = \{H,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Fundamentale Poissonklammern: $\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; ; \; \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 .$$

Die Poissonklammern erlauben eine direkte Quantisierung eines Systems:

$$\dot{f} = \{f, H\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} \underbrace{[\hat{f}, \hat{H}]}_{\text{Kommutator der Operatoren } \hat{f}, \hat{H}} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{f}\hat{H} - \hat{H}\hat{f}) = \dot{\hat{f}}$$

Dies funktioniert auch für Feldtheorien.

Rechenregeln für Poissonklammern: • Linearität: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$

- Antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Produktregel: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\} g$
- Jacobiidentität: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

PK-Theorem: Die Bewegungsgleichungen für die $q_i(t)$ und $p_i(t)$ werden genau dann durch eine Hamiltonfunktion $H(q,p,t)$ erzeugt, wenn für jedes Paar von Observablen ~~Variable~~ $u = u(q,p,t)$ und $v = v(q,p,t)$ die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\frac{d}{dt} \{u,v\} = \left\{\frac{du}{dt}, v\right\} + \left\{u, \frac{dv}{dt}\right\}$$ erfüllt ist.

Erlaubt zu entscheiden, ob ein System mit gegebenen Bewegungsgleichungen auf eine Hamiltonsche Form gebracht werden können.

9.) Kanonische Transformationen.

Punkttransformationen: Neue Koordinaten $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_f, t)$ $i = 1, 2, \dots f$ sollen das System beschreiben. Dann müssen sich die Q_i nach den q_i auflösen lassen, d.h. $\det\{\partial Q_i / \partial q_j\} \neq 0$: $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_f, t)$. Punkttrafos sind aber nicht allgemein genug.

Kanonische Transformation: Es werden sowohl Koordinaten als auch Impulse transformiert: $Q_i = Q_i(q, p, t)$ und $P_i = P_i(q, p, t)$.
Die Umkehrfunktionen sind $q_i = q_i(Q, P, t)$ und $p_i = p_i(Q, P, t)$.
Kanonische Transformationen sind solche Transformationen $Q = (q, p, t)$ und $P = P(q, p, t)$, bei denen die Hamiltonschen Gleichungen $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ und $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ wieder in Hamiltonsche Gleichungen übergehen, d.h.

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}$$ wobei $\tilde{H}$ die transformierte Hamiltonfkt. ist.

Erzeugung von kanonischen Trafos: Kanonische Gln folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip ⇝ auch das kanonisch transformierte System erfüllt dieses Prinzip:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)\right] dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q, P, t)\right] dt = 0.$$

Dazu müssen die Integranden nur um das totale Differential einer Funktion ϕ verschieden sein: $\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H} + \frac{d\phi}{dt}$ (*)
ϕ ist eine Funktion der 4f Variablen q, p, Q, P, die jedoch nicht unabhängig sind.
Denkt man sich die 2f Variablen gegeben als $P_i(q, p)$ und $p_i(Q, P)$, so hängt ϕ nur noch von den 2f Koordinaten ab, $\phi = \phi(q, Q, t)$.
Diese Bedingung ist hinreichend, denn die Variation von $\int \frac{d\phi}{dt} dt$ verschwindet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\phi}{dt} dt = \delta \left[\phi(q, Q, t)\right]_{t_1} - \delta\left[\phi(q, Q, t)\right]_{t_0} = 0.$$

Mit $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \phi}{\partial Q_i} \dot{Q}_i\right)$ erhalten wir mit (*):

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial \phi}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i = \sum \left(P_i + \frac{\partial \phi}{\partial Q_i}\right) \dot{Q}_i + H - \tilde{H} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Diese Beziehung wird erfüllt, falls:

$$p_i = \frac{\partial \phi(q,Q,t)}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \phi(q,Q,t)}{\partial Q_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \phi(q,Q,t)}{\partial t}$$

Diese Gleichungen stellen für beliebiges $\phi(q,Q,t)$ eine kanonische Transformation dar, wobei $\tilde{H}$ die neue Hamiltonsche Funktion ist. ϕ ist die Erzeugende der Transformation. Ist sie nicht explizit von t abhängig, so wird $\tilde{H} = H$ (in den neuen Variablen).

<u>Bem.:</u> Anstelle $\phi(q,Q,t)$ kann man ϕ auch aus anderen f alten und f neuen Variablen betrachten, also: $\phi(q,Q,t)$, $\phi(q,P,t)$, $\phi(p,Q,t)$, $\phi(p,P,t)$. z.Bsp. folgt für $\phi(q,P,t)$:

$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt}(\phi - \sum P_i Q_i)$ und damit

$$p_i = \frac{\partial \phi(q,P,t)}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \phi(q,P,t)}{\partial P_i}; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \phi(q,P,t)}{\partial t}$$

Dabei kann der Koordinaten- und Impulscharakter von Q, P ganz verloren gehen, Bsp.:

$\phi = \sum q_i Q_i \rightsquigarrow \quad p_i = Q_i$ und $q_i = -P_i$.

Mit der Erzeugenden $\phi = \sum F_i(q,t) P_i$ folgt $Q_i = F_i(q,t)$ d.h. eine Punkttrafo $\Rightarrow$ Alle Punkttransformationen sind kanonisch.

<u>Bsp.: (1.) Harmonischer Oszillator:</u> $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$

Wähle $\phi(q,Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$ fällt hier vom Himmel

$$\Rightarrow p = \frac{\partial \phi}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \quad P = -\frac{\partial \phi}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}$$

Auflösen nach q und p: $q = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \sqrt{P} \sin Q$ und $p = \sqrt{2m\omega} \sqrt{P} \cdot \cos Q$

$\Rightarrow$ Einsetzen liefert $\tilde{H} = \omega P$

Somit ist $\tilde{H}$ zyklisch in Q! $\rightsquigarrow \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}$; $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}$ ergibt $P = \alpha$; $Q = \omega t + \beta$ mit den Konstanten α, β. In den alten Koordinaten haben wir das bekannte Erg.:

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) = C \sin(\omega t + \beta); \quad p = m\omega C \cos(\omega t + \beta) = m\dot{q}$$

<u>Invarianz des Phasenraumelements:</u> Bei einer kanon. Trafo bleibt das Phasenraumelement $dq_1 dq_2 \dots dq_f dp_1 dp_2 \dots dp_f = dQ_1 dQ_2 \dots dQ_f dP_1 dP_2 \dots dP_f$ gleich. (Satz v. Poincaré).

Es gilt also:
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial P_f} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_f}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_f}{\partial P_f} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{Erhaltung der Funktionaldeterminante.}$$

Bew. für 2 Variable (allgemeiner Fall siehe Goldstein):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{vmatrix} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{-\frac{\partial^2\phi}{\partial Q^2}}{\frac{\partial^2\phi}{\partial q\partial Q}} \frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\frac{\partial q}{\partial P} - \underbrace{\frac{\partial^2\phi}{\partial q\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P}}_{=1}$$

$$+ \frac{\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial Q^2}}{\frac{\partial^2\phi}{\partial q\partial Q}}\frac{\partial q}{\partial P} = 1.$$

Die Poisson klammer sind ebenfalls invariant:

$$\{f, g\} = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i}\right)$$

Es gilt: Die notwendige und hinreichende Bedingungen, dass die Transformation $Q_i = Q_i(q, p)$ und $P_i = P_i(q, p)$ kanonisch ist, lauten:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0; \quad \{P_i, P_j\} = 0; \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j = 1, 2, \dots f.$$

III. Mechanik des starren Körpers. In einem starren Körper ist die gegenseitige Distanz je zweier Punkte immer konstant. Er ist durch 6 voneinander unabhängige Koordinate bestimmt, hat also 6 Freiheitsgrade, solange er frei beweglich ist: Wähle beliebigen Punkt A im starren Körper: 3 Freiheitsgrade. Der zweite Punkt B kann sich nur noch auf einer Kugelfläche um A bewegen: 2 Freiheitsgrade. Ein dritter Punkt kann sich nur noch in einer Kreisbahn um die Achse AB bewegen: 1 Freiheitsgrad.

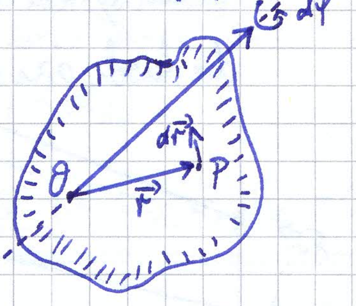
Wird der starre Körper an einem Punkt unterstützt, so hat er nur noch 3 Rotationsfreiheitsgrade: Kreisel. Wird eine feste Drehachse festgelegt, so hat ein solches physisches Pendel noch einen Freiheitsgrad.

Problem bei der Beschreibung der Bewegung des starren Körpers: Rotationen sind nicht vertauschbar.

Es gilt: Jede Verschiebung des starren Körpers (Überführung von einer Anfangslage in eine beliebige vorgeschriebene Endlage) lässt sich aus einer Translation und einer Rotation zusammensetzen. Der Satz von Chasles sagt sogar aus, dass sich immer eine solche Translation finden lässt, die zur Rotationsachse parallel ist: die allgemeinste Verschiebung eines starren

Körpers ist äquivalent einer Schraubenbewegung oder Bewegungsschraube.
Die allgemeine Bewegung des starren Körpers aus Lage 1 nach Lage 2 wird in den Zwischenschritten von der Verschiebung abweichen. Diese Bewegung können wir aber aus sukzessiven infinitesimalen Verschiebungen zusammensetzen: die allgemeinste Bewegung des starren Körpers ist eine Aufeinanderfolge elementarer (infinitesimaler) Translationen und Rotationen (oder elementarer Schraubenbewegungen). Die zu einem bestimmten Zeitpunkt gehörige Rotationsachse bezeichnet man als momentane oder instantane Drehachse.
Die elementare Translation $d\vec{s}$ und die Translationsgeschwindigkeit $\frac{d\vec{s}}{dt}$ sind freie Vektoren: ihr Anfangspunkt kann in jeden beliebigen Punkt des starren Körpers gelegt werden.
Elementare Rotation erzeugt die elementare Verschiebung

$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ und Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



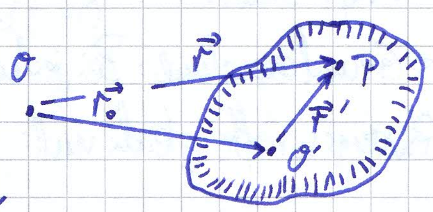
Zwei aufeinanderfolgende elementare Drehungen, um die sich im Punkt O schneidenden Drehachsen $d\vec{\varphi}_1$ und $d\vec{\varphi}_2$:

$$d\vec{r}_1 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r}$$

$$d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_2 \times (\vec{r} + d\vec{r}_1) = d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r} + \underbrace{d\vec{\varphi}_2 \times d\vec{r}_1}_{\text{2. Ordnung wird vernachlässigt}}$$

$$\rightsquigarrow d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r} = (d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \times \vec{r} = \left[(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}\right] dt$$

Und damit auch $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$: Winkelgeschwindigkeiten werden wie Vektoren addiert und infinitesimale Rotationen sind vertauschbar.



Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes: die Elementarverschiebung ist gegeben durch eine Translation $d\vec{r}_0$ und eine in O' verlaufende Rotationsachse mit Verschiebung $d\vec{\varphi} \times \vec{r}\,'$
Eulersche Formeln: Die elementare Verschiebung des Punktes P des starren Körpers beträgt

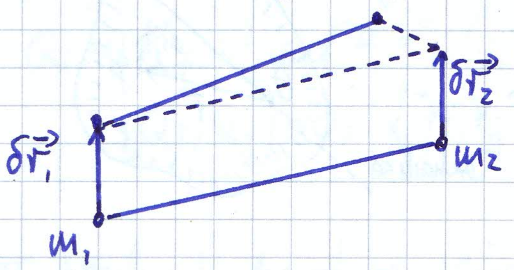
$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{\varphi} \times \vec{r}\,' = d\vec{r}_0 + d\vec{\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Geschwindigkeit des Punktes P: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$

*** EINSCHUB AD SEITE 45 ***

Für ein gebundenes System haben wir die Bewegungsgleichungen $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i'$, $i = 1, 2, \dots n$ mit den Zwangskräften $\vec{F}_i'$. Diese sind i.allg. unbekannt. Einzelner Massenpunkt: Annahme, dass $\vec{F}'$ senkrecht zur vorgegebenen Bahn/Kurve. Diese Formulierung ist ungeeignet zur Verallgemeinerung für ein System von Massenpunkten, da andere Zwangsbedingungen als vorgeschriebene Flächen/Kurven auftreten können (Bsp. starre Stange). Man kann aber das Prinzip der virtuellen Arbeit direkt verallgemeinern.

Frage: Soll die virtuelle Arbeit für jeden einzelnen Massenpunkt verschwinden oder für das Gesamtsystem die Summe der virtuellen Arbeiten? Betrachte zwei Massenpunkte, die durch eine masselose starre Stange verbunden sind: Stange fixiert Abstand



von m_1 und m_2 ⇝ Annahme, dass Zwangskraft in Richtung der Verbindung von m_1 & m_2 $\therefore$ $\vec{F}_1' = -\vec{F}_2'$. Jede mögliche kleine Verrückung des Systems lässt sich aus der Translation $\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2$ und einer kleinen Rotation um m_1 zusammensetzen. Die virtuelle Arbeit der Zwangskraft $\vec{F}_1'$ und $\vec{F}_2'$ wird zu $\vec{F}_1'\delta\vec{r}_1$ und $\vec{F}_2'\delta\vec{r}_2 = -\vec{F}_1'\delta\vec{r}_1$, d.h. die Gesamtarbeit ist null. Die Arbeit der Rotation verschwindet ebenfalls, da die Verrückung von m_2 senkrecht zur Zwangskraft steht.

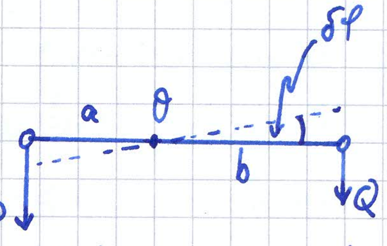
⇒ Grundannahme: Bei jedem Punktsystem ist die gesamte virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich null: $\underline{\underline{\sum \vec{F}_i' \delta\vec{r}_i = 0}}$.

Aus $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i'$ folgt $\sum \vec{F}_i' \delta\vec{r}_i = -\sum (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i)\delta\vec{r}_i$

⇝ vereinigte Form des Prinzips der virtuellen Arbeit und des d'Alembertschen Prinzips:

$$\underline{\underline{\sum (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i)\delta\vec{r}_i = 0}}.$$

Im Gleichgewichtsfall: $\sum \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0$



Bsp.: Hebel: virt. Arbeit $Pa\delta\varphi - Qb\delta\varphi = 0$

⇝ $Pa = Qb$ die auf Achse 0 bezogenen Drehmomente sind gleich.

Das d'Alembertsche Prinzip (und somit auch das Prinzip der virtuellen Arbeit) ist ein selbständiges Prinzip der Mechanik, dem allgemeine Gültigkeit zugeschrieben wird, da die aus ihm gewonnenen Folgerungen stets durch die Erfahrung bestätigt worden sind.

Freies System: jede Verrückung $\delta\vec{r}_i$ ist beliebig $\Rightarrow$ in der Summe $\sum(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\delta\vec{r}_i = 0$ muss jeder einzelne Term verschwinden $\rightarrow$ Newtongleichungen $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wir führen die vereinfachte Notation ein:

Koordinaten statt $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n \longrightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}$

Kräfte statt $F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, \ldots, F_{x_n}, F_{y_n}, F_{z_n} \longrightarrow F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{3n-2}, F_{3n-1}, F_{3n}$

Massen statt $m_1 \longrightarrow m_1 = m_2 = m_3, \ldots, m_n \longrightarrow m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}$

D'Alembert-Prinzip in rechtwinkligen Koordinaten wird zu: $\underline{\underline{\sum_{1}^{3n}(F_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i = 0.}}$

<u>Einteilung der Bewegungsgleichungen:</u> Haben wir $r \leq 3n$ Bedingungsgleichungen der Form

$$f_{l_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, t) = 0 \qquad (l_k = 1, 2, \ldots, r) \qquad (*)$$

so ist das System <u>holonom</u>. Genauer: holonom-skleronom oder holonom-rheonom, je nachdem, ob Zeit explizit fehlt oder auftritt. Man kann $(*)$ schreiben als

$$\frac{\partial f_{l_k}}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_{l_k}}{\partial x_i}dx_i + \ldots + \frac{\partial f_{l_k}}{\partial x_{3n}}dx_{3n} + \frac{\partial f_{l_k}}{\partial t}dt = 0$$

Allgemeinere Bedingungsgleichungen der Form:

$$a_{l_k 1}dx_1 + \ldots + a_{l_k i}dx_i + \ldots + a_{l_k, 3n}dx_{3n} + a_{l_k 0}dt = 0 \qquad (l_k = 1, 2, \ldots, r) \qquad (**)$$

wobei $a_{l_k i} = a_{l_k i}(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, t)$.

Ist $(**)$ ein vollständiges Differential, sind also $a_{l_k i} = \frac{\partial f_{l_k}}{\partial x_i}$ und $a_{l_k 0} = \frac{\partial f_{l_k}}{\partial t}$, haben wir ein holonomes System. Im anderen Fall ist das System nichtholonom.

$a_{l_k 0} = 0$: skleronom, sonst rheonom.

<u>Formulierung der Lagrangegleichungen erster Art:</u> Multipliziere erste Gleichung von $(**)$ mit λ_1, usw., und addiere diese Bedingungen zum d'Alembertprinzip:

$$\sum_1^{3n} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i + \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_r a_{ri}\right) \delta x_i = 0$$

Wähle die Lagrangemultiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ so, dass r Glieder der Summe verschwinden (denn wir haben ja r Bedingungsgleichungen). In den restlichen $3n-r$ Gliedern können dann die δx_i als voneinander unabhängig angesehen werden und somit beliebig gewählt werden. Die zugehörigen Koeffizienten müssen verschwinden:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_r a_{ri} \qquad (i = 1, 2, \dots, 3n)$$

Dies sind die <u>Lagrangegleichungen 1. Art</u>. Zusammen mit den r Bedingungsgleichungen ergeben sich $3n+r$ Gleichungen, mit denen wir die Koordinaten $x_1, \dots, x_{3n}$ und die Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ bestimmen.

Lassen sich diese Gleichungen integrieren und damit die λ_i ermitteln, können wir die Zwangskräfte ermitteln. Diese sind durch $m_i \ddot{x}_i = F_i + F_i'$ definiert $\Rightarrow$ wir haben

$$F_i' = \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_r a_{ri} \qquad (i = 1, 2, \dots, 3n).$$

Bei einem <u>holonomen</u> System mit den Bedingungsgleichungen $f_k(x_1, \dots x_{3n}, t) = 0$ lauten dann die Lagrangegln. erster Art:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \lambda_1 \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \dots + \lambda_r \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, 3n)$$

mit den Zwangskräften $X_i' = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i}$.

<u>Energiesatz</u>: Bei einer wirklichen Veränderung $dx_1, dx_2, \dots$ des Systems in der Zeit dt ist die Arbeit der Zwangskräfte

$$\sum_{i=1}^{3n} F_i' dx_i = \sum \left(\lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_r a_{ri}\right) dx_i = \sum_{k=1}^{r} \left(\lambda_k \sum_{i=1}^{3n} a_{ki} dx_i\right) = -\sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_{k0} dt$$

$$\left(a_{k1} dx_1 + \dots + a_{k,3n} dx_{3n} + a_{k0} dt = 0\right)$$

Die Gesamtarbeit der Zwangskräfte im skleronomen System ist null.

Oft wollen wir die Zwangskräfte gar nicht wissen. Wir formulieren die mechanischen Gleichungen nun so, dass diese nicht mehr auftreten $\longrightarrow$ Lagrangegln. 2. Art.

***

* Fortsetzung von Seite 59. *

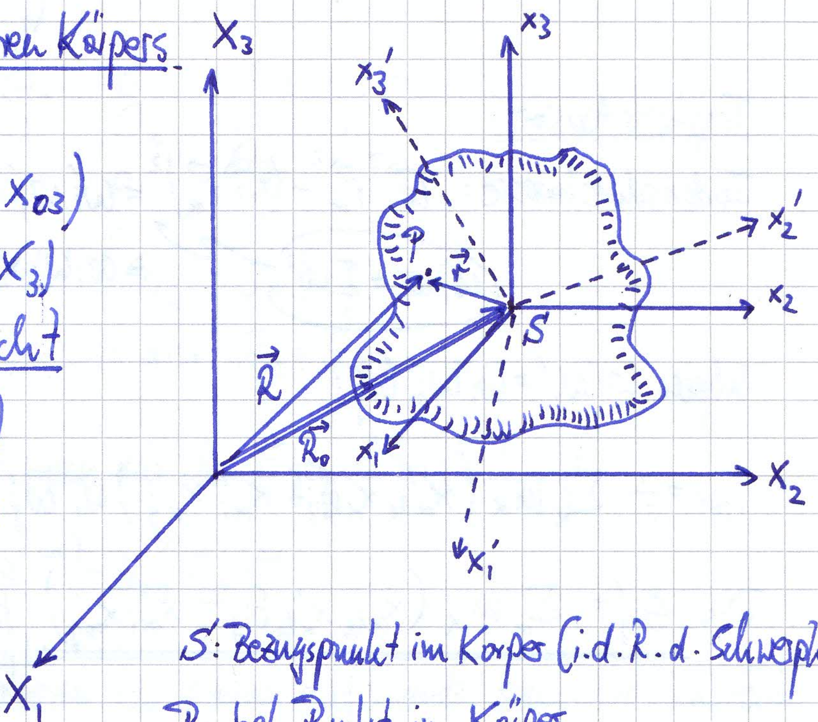
1. Beschreibung der Bewegung des starren Körpers

3 Koordinatensysteme: $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$

System I: Inertialsystem, $\vec{R}_0 = (X_{01}, X_{02}, X_{03})$
$\vec{R} = (X_1, X_2, X_3)$

System II: Mit S mitbewegtes, aber nicht mitgedrehtes System: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

System III: Mit dem starren Körper fest verbundenes System: $\vec{r} = (x_1', x_2', x_3')$

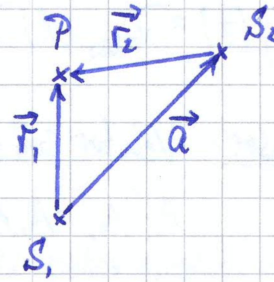


S: Bezugspunkt im Körper (i.d.R. d. Schwerpkt)
P: bel. Punkt im Körper

Geschwindigkeit des Punktes P in dieser Notation:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{(vgl. S. 59)}.$$

Andere Wahl des Bezugspunktes: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{a}$



$\rightsquigarrow \vec{v} = \vec{v}_{01} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$, aber auch
$\vec{v} = \vec{v}_{02} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{a}$

Da $\vec{r}_1$ beliebig ist und $\vec{\omega}_2$ fix $\Rightarrow$ $\vec{v}_{02} = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{a}$ und $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist vom Bezugspunkt unabhängig.

2. Kinetische Energie des starren Körpers, Trägheitstensor

Der starre Körper habe die Massepunkte m_α: $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_0^{\,2} + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{a})^2 \equiv T_{trans} + T_w + T_{rot}$$

Translationsenergie $T_{trans} = \frac{\vec{v}_0^{\,2}}{2}\sum_\alpha m_\alpha = \frac{m\vec{v}_0^{\,2}}{2}$; $m \equiv \sum_\alpha m_\alpha$ Gesamtmasse

Wechselseitige Energie $T_w = \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha) = m\,\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_S)$; $\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum m_\alpha \vec{r}_\alpha$

T_w verschwindet, wenn Ursprung des körperfesten Systems im Schwerpunkt liegt, oder falls die Translationsgeschwindigkeit verschwindet.

 Rotationsenergie: $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left[\vec{\omega}^2 \vec{r}_\alpha^{\,2} - (\vec{\omega}\vec{r}_\alpha)^2\right]$

komponentenweise $[\ ] = \vec{\omega}^2 \vec{r}_\alpha^{\,2}(1-\cos^2\alpha)$

Trägheitstensor:

Indexschreibweise: $\vec{\omega}^2\vec{r}_\alpha^{\,2} - (\vec{\omega}\vec{r}_\alpha)^2 = \omega_i'\omega_i' x_{\alpha k}' x_{\alpha k}' - \omega_i' x_{\alpha i}' \omega_j' x_{\alpha j}'$ System III

$\omega_i'\omega_i' = \sum_i \omega_i'^2$ $\quad = \omega_i\omega_i x_{\alpha k} x_{\alpha k} - \omega_i x_{\alpha i}\omega_j x_{\alpha j}$ System II

Wegen $\omega_i'\omega_i' = \omega_i'\omega_j'\delta_{ij}$:

T_{rot} ist invariant unter Wechsel des KOS.
$\Rightarrow \Theta$ ist Tensor

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha k}' x_{\alpha k}'\delta_{ij} - x_{\alpha i}' x_{\alpha j}')\omega_i'\omega_j' \equiv \boxed{\frac{1}{2}\Theta_{ij}'\omega_i'\omega_j' = \frac{1}{2}\Theta_{ij}\omega_i\omega_j}$$

Die $\underline{\Theta_{ij}' = \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha k}' x_{\alpha k}'\delta_{ij} - x_{\alpha i}' x_{\alpha j}')}$ Komponenten des Trägheitstensors im körperfesten Koordinatensystem

Θ_{ij}' sind bei Bewegung des starren Körpers konstant.
Die Komponenten im raumfesten System sind i. allg. nicht konstant:

$$\Theta_{ij}(t) = D_{ki}(t) D_{lj}(t)\Theta_{kl}' \quad ; \quad D_{ij}(t) \text{ ist Drehtensor} \;;\; \Theta_{ij}' = D_{ik}D_{jl}\Theta_{kl}$$

Drehtensor: Vektor soll gedreht werden: $A_i' = D_{ij}A_j$, Länge A_iA_i bleibt konstant:
$A_i'A_i' = A_iA_i \Rightarrow D_{ij}D_{ik} = D_{ji}D_{ki} = \delta_{ij}$

Trägheitstensor in Matrixform:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha 2}'^2 + x_{\alpha 3}'^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha 1}' x_{\alpha 2}' & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha 1}' x_{\alpha 3}' \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha 2}' x_{\alpha 1}' & \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha 1}'^2 + x_{\alpha 3}'^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha 2}' x_{\alpha 3}' \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha 3}' x_{\alpha 1}' & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha 3}' x_{\alpha 2}' & \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha 1}'^2 + x_{\alpha 2}'^2) \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor bei kontinuierlicher Massenverteilung:

$$\Theta_{ij}' = \iiint \rho(x_1', x_2', x_3')\left((x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)\delta_{ij} - x_i' x_j'\right) dx_1' dx_2' dx_3'$$

Massendichte

Hauptträgheitsachsen: $\Theta'_{ij} = \Theta'_{ji} \rightsquigarrow \Theta$ symmetrisch $\rightsquigarrow \exists$ Koordinatensystem, in dem Θ'_{ij} diagonal sind.

Im Hauptachsensystem ist $\Theta'_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte Θ_α bekommt man aus $\det\left(\Theta'_{ij} - \Theta_\alpha \delta_{ij}\right) = 0$.
Diese Eigenwerte sind Invarianten, es gilt also $\Theta_\alpha = \Theta'_\alpha$.

Die Hauptachsenrichtungen bekommt man aus den Eigenvektorgleichungen

$$\Theta_\alpha A_i^{(\alpha)} = \Theta_{ij} A_j^{(\alpha)} \quad \text{bzw.} \quad \Theta_\alpha A_i'^{(\alpha)} = \Theta'_{ij} A_j'^{(\alpha)}$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigen~~vektoren~~werten Θ_α stehen aufeinander senkrecht. Im Falle der Entartung können sie senkrecht gewählt werden.

Bei geeigneter Normierung gilt: $A_i^{(\alpha)} A_i^{(\beta)} = A_i'^{(\alpha)} A_i'^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$

Es gilt dann die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_\alpha A_i^{(\alpha)} A_j^{(\alpha)} = \sum_\alpha A_i'^{(\alpha)} A_j'^{(\alpha)} = \delta_{ij}$$

(Denn $a_i = \sum_\alpha A_j^{(\alpha)} a_j A_i^{(\alpha)} = \sum_\alpha A_i^{(\alpha)} A_j^{(\alpha)} a_j$; da a_j beliebig, folgt obiges Resultat.)

Darstellung des Trägheitstensors durch seine Eigenwerte und Eigenvektoren:

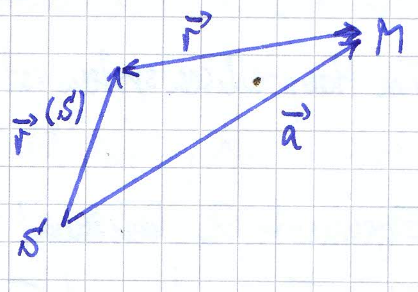
$$\Theta_{ij} = \sum_\alpha A_i^{(\alpha)} \Theta_\alpha A_j^{(\alpha)}; \quad \Theta'_{ij} = \sum_\alpha A_i'^{(\alpha)} \Theta_\alpha A_j'^{(\alpha)}$$

Trägheitsellipsoid: Einen symmetrischen Tensor kann man durch die Fläche $\Theta_{ij} x_i x_j = 1$ charakterisieren. Diese Fläche ist ein Ellipsoid, das im Hauptachsensystem die Form

$$\Theta_1 x_1^2 + \Theta_2 x_2^2 + \Theta_3 x_3^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \;;\; a_\alpha \equiv \sqrt{\frac{1}{\Theta_\alpha}}$$ annimmt.

Liegen die Massenpunkte des starren Körpers nicht alle auf einer Achse, so ist Θ_{ij} positiv definit, und alle Θ_α sind positiv.

Änderung des Bezugspunktes: Gewöhnlich bezieht man Θ auf den Schwerpunkt. Möchte man Θ um einen anderen Punkt M, der die Koordinaten a_i habe, berechnen, so bekommt man:



$$\vec{r} = \vec{r}^{(S)} - \vec{a} \quad \text{oder} \quad x'_{\alpha i} = x'^{(S)}_{\alpha i} - a'_i$$

$$x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} = x'^{(S)}_{\alpha i} x'^{(S)}_{\alpha j} - a'_i x'^{(S)}_{\alpha j} - a'_j x'^{(S)}_{\alpha i} + a'_i a'_j$$

und wegen $\sum_\alpha m_\alpha x'^{(S)}_{\alpha i} = 0$ folgt:

$$\Theta'_{ij} = \Theta'^{(S)}_{ij} + \overbrace{m\left(a'_k a'_k \delta_{ij} - a'_i a'_j\right)}^{\Theta_{\text{Massenpunkt}} \text{ bezüglich } M}$$

Satz von Steiner: Der Trägheitstensor um einen beliebigen Punkt ist gleich dem Trägheitstensor im Schwerpunkt, vermehrt um den Trägheitstensor der im Schwerpunkt vereinigt gedachten gesamten Masse des Körpers hinsichtlich des Bezugspunktes M: $\quad \Theta_M = \Theta_S + \Theta_{\text{Massenpunkt}}$

Berechnung des Trägheitstensors: Bei der Berechnung von Θ und der Hauptträgheitsachsen nutzt man die Symmetrie des Körpers aus. Da bei einer Symmetrieoperation das Trägheitsellipsoid wieder in sich selbst übergehen muss, folgt:

Körper besitzt eine Symmetrieebene (Bsp. Stuhl): der Schwerpunkt liegt in dieser Ebene.

Eine Hauptträgheitsachse steht senkrecht auf dieser Ebene, die beiden anderen liegen in dieser Ebene $\Rightarrow$

Körper besitzt eine Symmetrieachse: der Schwerpunkt muss auf der Achse liegen.

Die Symmetrieachse muss Hauptträgheitsachse sein. Ist die Symmetrieachse mind. dreizählig, so besitzen die zur Symmetrieachse ~~gehörigen~~ senkrechten Hauptträgheitsachsen gleiche Eigenwerte. Die anderen Hauptträgheitsachsen können dann beliebig gewählt werden, solange sie senkrecht zur Symmetrieachse stehen.

Auch Körper ohne Symmetrien besitzen Hauptträgheitsachsen, die man berechnen kann.

Beispiele: (1.) Homogene Vollkugel (homogen: $\rho = \text{const.}$)

Jede Achse durch Mittelpunkt ist Symmetrieachse. Daher kann jede Achse Hauptträgheitsachse sein $\Rightarrow$ nur möglich, wenn Trägheitstensor proportional dem Einheitstensor ist:

$\Theta'_{ij} = \Theta\,\delta_{ij}$ hat in jedem gedrehten System dieselbe Gestalt $\Rightarrow \Theta'_{ij} = \Theta_{ij}$

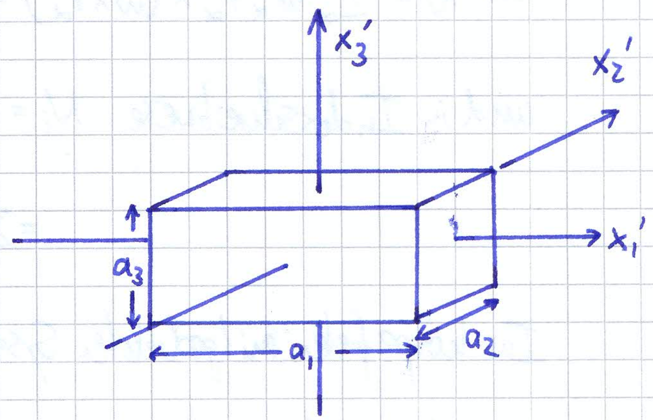
Berechnung von Θ'_{ij}: $\Theta'_{ii} = \Theta\,\delta_{ii} = \Theta \cdot 3$ Spur

$$\rightsquigarrow \Theta\,\delta_{ii} = \rho \int \left(x'_k x'_k \cdot 3 - x'_i x'_i\right) dV' = 2\rho \int x'_i x'_i \, dV'$$

$$= 2\rho \int_0^R \int_\Omega r^2 r^2 \, dr \, d\Omega = 2\rho \cdot 4\pi \int_0^R r^4 \, dr = \frac{8\pi\rho R^5}{5} \rightsquigarrow \Theta = \frac{8\pi\rho R^5}{15}$$

$$\Theta = \frac{2}{5} R^2 \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \equiv \frac{2}{5} m R^2$$

$$\underline{\underline{\Theta'_{ij} = \frac{2}{5} m R^2 \delta_{ij}}}.$$



(2.) Quader mit Kantenlängen a_1, a_2, a_3

Jeweils zweizählige Symmetrieachse fallen mit x'_1, x'_2, x'_3 Achsen zusammen.

$$\underline{\underline{\Theta'_{11}}} = \rho \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \int_{-a_2/2}^{a_2/2} \int_{-a_3/2}^{a_3/2} \left(x_2'^2 + x_3'^2\right) dx'_1 \, dx'_2 \, dx'_3$$

$$= \rho\, a_1 \left\{ \underbrace{\left[\frac{x_2'^3}{3}\right]_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}}}_{a_2^3/12} \cdot a_3 + \underbrace{\left[\frac{x_3'^3}{3}\right]_{-\frac{a_3}{2}}^{\frac{a_3}{2}}}_{a_3^3/12} \cdot a_2 \right\} = \rho\, a_1 a_2 a_3 \left(\frac{a_2^2}{12} + \frac{a_3^2}{12}\right) = \underline{\underline{\frac{m}{12}\left(a_2^2 + a_3^2\right)}}$$

analog $\Theta'_{22} = \frac{m}{12}\left(a_1^2 + a_3^2\right)$; $\Theta'_{33} = \frac{m}{12}\left(a_1^2 + a_2^2\right)$.

Spezialfall Kubus: $a_1 = a_2 = a_3 = a \rightsquigarrow \Theta'_{ij} = \frac{m}{6} a^2 \delta_{ij}$ isotrop

wie Vollkugel mit $R = \sqrt{5/12}\, a$.

3.) Drehimpuls, Drehmoment und Bewegungsgleichung. Grundgleichungen sind analog den Ergebnissen bei Systemen von Massenpunkten: $\vec{N} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{R}_\alpha \times \dot{\vec{R}}_\alpha$ Drehimpuls

Drehmoment: $\vec{M} = \sum_\alpha \vec{R}_\alpha \times \vec{F}_\alpha$; Drehimpulssatz: $\dot{\vec{N}} = \vec{M}$.

Der Bezugspunkt, wie wir gesehen haben, ist beliebig. Mit dem Schwerpunkt als Bezugspunkt:

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha$$

$$\vec{N}_S = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha$$

$$\vec{M}_S = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha$$

$$\dot{\vec{N}}_S = \vec{M}_S.$$

Unterdrücken wir Index S und benutzen, dass in S $\dot{\vec{r}}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$

$$\Rightarrow \vec{N} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{r}_\alpha^{\,2}\vec{\omega} - \vec{r}_\alpha(\vec{r}_\alpha \vec{\omega})\right)$$

und in Indexschreibweise $N_i = \sum_\alpha m_\alpha \left(x_{\alpha k}x_{\alpha k}\omega_i - x_{\alpha i}(x_{\alpha j}\omega_j)\right)$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left(x_{\alpha k}x_{\alpha k}\delta_{ij} - x_{\alpha i}x_{\alpha j}\right)\omega_j = \Theta_{ij}\omega_j$$

Im körperfesten mitgedrehten System:

$$N_i' = \sum_\alpha \left(x_{\alpha k}' x_{\alpha k}' \delta_{ij} - x_{\alpha i}' x_{\alpha j}'\right)\omega_j' m_\alpha = \Theta_{ij}'\omega_j'$$

$$\Rightarrow N_i = \Theta_{ij}\omega_j = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_i} \; ; \; N_i' = \Theta_{ij}'\omega_j' = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_i'}$$

Der Drehimpulssatz darf in Indexschreibweise nur in System II benutzt werden, er gilt i. allg. nicht in System III:

$$M_i = \dot{N}_i = \frac{d}{dt}\left(\Theta_{ij}\omega_j\right).$$

Aber: im System II ist Θ_{ij} i. allg. eine Funktion der Zeit. $\rightsquigarrow$ $M_i = \dot{N}_i$ umschreiben für III: Beschreibe D_{ik} (Drehtensor) die Drehung des Körpers:

$$x_i' = D_{ik}x_k \; ; \; x_i = D_{ki}x_k' \qquad D_{ji} = (D^{-1})_{ij}$$

$$M_i' = D_{ik}M_k \; ; \; M_i = D_{ki}M_k'$$

$$N_i' = D_{ik}N_k \; ; \; N_i = D_{ki}N_k'$$

$\Rightarrow M_i = \dot{N}_i$ wird zu $D_{ki} M_i' = \frac{d}{dt}\left(D_{ki} N_k'\right) = \dot{D}_{ki} N_k' + D_{ki} \dot{N}_k'$ (*)

$$\dot{N}_k' = \frac{d}{dt}\left(\Theta_{kj}' \omega_j'\right) = \Theta_{kj}' \dot{\omega}_j' \quad (\text{da } \dot{\Theta}_{kj}' = 0)$$

Zeitliche Änderung des ~~Drehimpulses~~ Drehtensors: mit $\vec{r} = \vec{r}_\alpha$ und $x_i = x_{\alpha i}$

$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ d.h. $\dot{x}_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k = y_i$

$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\left(D_{ki} x_k'\right) = D_{si} y_s'$ aus Einsetzen der Trafogleichungen

$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\left(D_{ki} x_k'\right) = D_{si} \varepsilon_{sjk}' \omega_j' x_k'$ wobei ε_{ijk} ein invariantes Tensor ist.

Ist x_k' die Koordinate eines Punktes des Körpers $\rightsquigarrow \dot{x}_k' = 0$

$\Rightarrow \dot{D}_{ki} x_k' = D_{si} \varepsilon_{sjk} \omega_j' x_k'$ muss für jedes x_k' gelten

$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{D}_{ki} = D_{si} \varepsilon_{sjk} \omega_j'}}$

Einsetzen in (*) liefert:

$D_{ki} M_k' = D_{si} \varepsilon_{sjk} \omega_j' \Theta_{kl}' \omega_l' + D_{ki} \Theta_{kj}' \dot{\omega}_j'$

$s \to k$, $k \to p$ Indextausch

$\Rightarrow M_k' = \varepsilon_{kjp} \Theta_{pl}' \omega_j' \omega_l' + \Theta_{kj}' \dot{\omega}_j'$

$\Rightarrow$ <u>Eulersche Kreiselgleichungen:</u> $\boxed{M_i' = \Theta_{ij}' \dot{\omega}_j' + \varepsilon_{ijk} \Theta_{kl}' \omega_j' \omega_l'}$

Wählt man beim körperfesten System als Koordinatensystem das Hauptachsensystem, so erhält man wegen:

$$M_1' = \Theta_1' \dot{\omega}_1' + \underbrace{\varepsilon_{123}}_{1} \Theta_3' \omega_2' \omega_3' + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1} \Theta_2' \omega_3' \omega_2' \text{ usw.}$$

und $\Theta_\alpha' = \Theta_\alpha$ die Eulerschen Gleichungen im Hauptachsensystem:

$$\boxed{\begin{aligned} M_1' &= \Theta_1 \dot{\omega}_1' + (\Theta_3-\Theta_2)\,\omega_2'\omega_3' \\ M_2' &= \Theta_2 \dot{\omega}_2' + (\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_3'\omega_1' \\ M_3' &= \Theta_3 \dot{\omega}_3' + (\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1'\omega_2' \end{aligned}}$$

Für $\Theta_3 \neq \Theta_2 \neq \Theta_1 \neq \Theta_3$ sind diese Gleichungen immer nichtlinear.

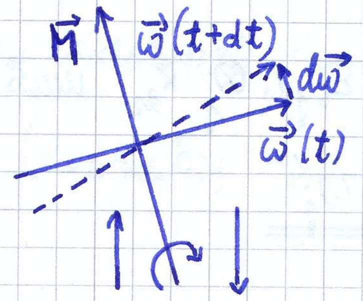
4.) Anwendungen und Spezialfälle.

(1.) Isotroper Trägheitstensor $\Theta_{ij} = \Theta\delta_{ij} = \Theta'_{ij}$

$\rightsquigarrow M_i = \frac{d}{dt}\left(\Theta\delta_{ij}\omega_j\right) = \frac{d}{dt}\left(\Theta\omega_i\right) = \Theta\frac{d\omega_i}{dt}$, symbolisch $\vec{M} = \Theta\frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Kräftefreier Fall $\vec{M}=0$: $\vec{\omega} = \text{const.}$ die Drehachse ändert sich nicht

$\vec{M} \neq 0$: $\quad d\vec{\omega} = \frac{\vec{M}}{\Theta}dt$



Drehrichtung weicht senkrecht zum Kräftepaar aus:

(2.) Eulersche Gleichungen im Hauptachsensystem für den kräftefreien Fall:

$\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3 \neq \Theta_1$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{aligned} \Theta_1\dot{\omega}_1' + (\Theta_3-\Theta_2)\,\omega_2'\omega_3' &= 0 \\ \Theta_2\dot{\omega}_2' + (\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_3'\omega_1' &= 0 \\ \Theta_3\dot{\omega}_3' + (\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1'\omega_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Integration führt auf elliptische Fktn.}$$

Rotation um Hauptträgheitsachsen: z.Bsp. $\omega_1' = \text{const}$, $\omega_2' = \omega_3' = 0$ ist sicher möglich. Frage: sind Bewegungen stabil? Betrachte Rotation um x_1'-Achse und kleine Abweichungen $\Delta\omega_1', \Delta\omega_2', \Delta\omega_3'$ um die stationären Werte $\omega_1' \neq 0$; $\omega_2' = \omega_3' = 0$. Wir berücksichtigen nur Terme 1. Ordnung. $\Rightarrow$

$$\Theta_1\Delta\dot{\omega}_1' = 0$$

$$\Theta_2\Delta\dot{\omega}_2' + (\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_1'\Delta\omega_3' = 0$$

$$\Theta_3\Delta\dot{\omega}_3' + (\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1'\Delta\omega_2' = 0$$

Elimination von $\Delta\omega_3'$ aus letzten beiden Gleichungen:

$$\Delta\ddot{\omega}_2' + \frac{\omega_1'^2}{\Theta_3\Theta_2}(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_1-\Theta_2)\,\Delta\omega_2' = 0$$ und identische Gl. für $\Delta\omega_3'$

$\leadsto$ Stabil, falls $(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_1-\Theta_2) > 0$ denn hier nur oszillierende Terme $\leadsto$ beschränkt

Instabil $(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_1-\Theta_2) < 0$ hier Term $\propto e^{\sqrt{\dots}\,t}$ exponentielles Anwachsen

Stabil also, falls Θ_1 das grösste Trägheitsmoment: $\Theta_1 > \Theta_3, \Theta_2$ oder wenn es das kleinste ist: $\Theta_1 < \Theta_2, \Theta_3$. Die Bewegung um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist instabil. (Gleiche Momente s.u.).

(3.) Freie Rotation um eine allgemeine Achse.

sei x_1' die Rotationsachse $\leadsto$

$$\Theta_{ij}'\dot{\omega}_j' + \varepsilon_{ijk}\Theta_{kl}'\omega_j'\omega_l' = 0$$ zusammen mit E-Satz $T = \frac{1}{2}\Theta_{ij}'\omega_i'\omega_j'$

liefern für $\vec{\omega}' = (\omega_1', 0, 0)$, $\omega_1' \neq 0$ und damit $\dot{\omega}_1' = 0 \wedge \underbrace{\varepsilon_{i1k}\Theta_{k1}' = 0}$

kann nur befriedigt werden, falls $\Theta_{21}' = \Theta_{31}' = 0$, d.h., wenn die Deviationsmomente verschwinden, also x_1'-Achse eine Hauptträgheitsachse ist!

Unfreie Rotation um x_1'-Achse auch bei vorhandenen Deviationsmomenten möglich $\Rightarrow$ Zwangsmomente auf Lager.

(4.) Freie Rotation des symmetrischen Kreisels.

(a) Behandlung im körperfesten System

Symmetrisch: zwei Hauptträgheitsmomente gleich, z.Bsp.: $\Theta_1 = \Theta_2 \equiv \Theta_\perp$; $\Theta_3 \equiv \Theta_\parallel$.

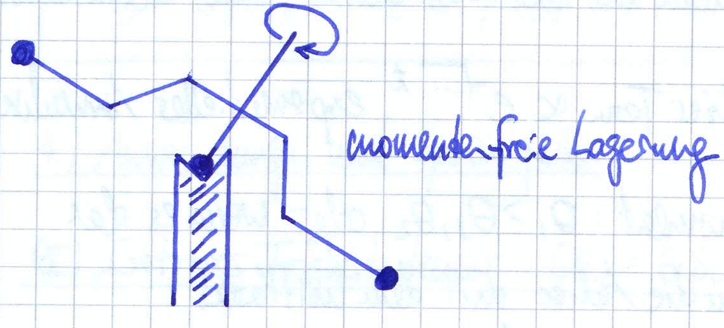
Eulergln.:

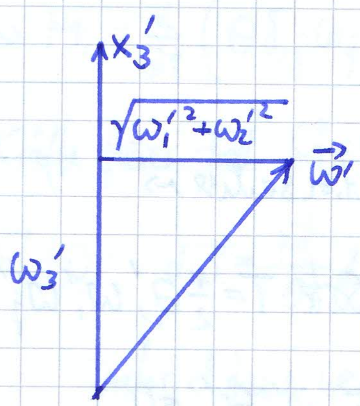
$$\Theta_\perp\dot{\omega}_1' = -(\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\omega_2'\omega_3'$$
$$\Theta_\perp\dot{\omega}_2' = (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\omega_1'\omega_3'$$
$$\Theta_\parallel\dot{\omega}_3' = 0$$

⇝ $\dot{\omega}_3' = \text{const.}$; $\dot{\omega}_1' = -\Omega\,\omega_2'$ und $\dot{\omega}_2' = \Omega\,\omega_1'$ ∴ $\Omega \equiv \frac{\Theta_\parallel - \Theta_\perp}{\Theta_\perp}\,\omega_3'$

⇝ allg. Lösung $\omega_1' = A\cos(\Omega t + \varphi)$, $\omega_2' = A\sin(\Omega t + \varphi)$

⇝ Bewegung immer stabil





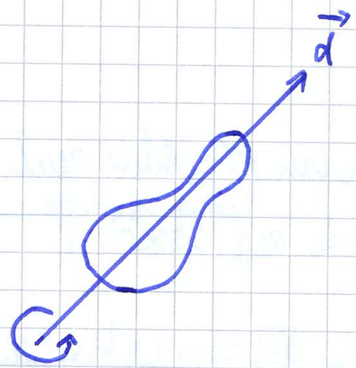
Winkelgeschwindigkeitsvektor läuft um die Figurenachse mit Winkelgeschw. Ω

Anwendung auf Erde: $\frac{\Theta_\parallel - \Theta_\perp}{\Theta_\perp} \approx \frac{1}{300}$

$\omega_3' = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$

⇝ $\frac{2\pi}{\Omega} = 300$ Tage (Eulersche Periode)

Tatsächlicher Wert: 433 Tage (Chandlersche Periode) wegen elastischer Deformation der Erde.



(b.) Behandlung im raumfesten System I

Symmetrieachse sei $\vec{d}$ mit $|\vec{d}| = 1$.

Mit Eigenwerten & Eigenvektoren:

$$\Theta_{ij} = \Theta_\perp \left(A_i^{(1)}A_j^{(1)} + A_i^{(2)}A_j^{(2)}\right) + \Theta_\parallel A_i^{(3)}A_j^{(3)}$$

und $A_i^{(3)} = d_i$

$$\rightarrow \Theta_{ij} = \Theta_\perp \overbrace{\left(A_i^{(1)}A_j^{(1)} + A_i^{(2)}A_j^{(2)} + A_i^{(3)}A_j^{(3)}\right)}^{\delta_{ij}} + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\underbrace{A_i^{(3)}A_j^{(3)}}_{d_i d_j}$$

$$\leadsto \Theta_{ij} = \Theta_\perp \delta_{ij} + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)\,d_i d_j$$

Zeitabhängigkeit von Θ_{ij} im raumfesten System II ist in $d_i = d_i(t)$ enthalten

$\Rightarrow$ Drehimpuls $\quad N_i = \Theta_{ij}\omega_j = \Theta_\perp \omega_i + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp) d_j \omega_j d_i$

bzw.: (I) $\vec{N} = \Theta_\perp \vec{\omega} + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)(\vec{d}\vec{\omega})\vec{d}$:. $\vec{N} = \text{const.}$ kräftefreier Kreisel/

Zusammen mit (II) $\dot{\vec{d}} = \vec{\omega} \times \vec{d}$ können wir die Bewegung bestimmen:

(I): $\vec{N}, \vec{\omega}, \vec{d}$ in einer Ebene!

Ausserdem gilt $\frac{d}{dt} \vec{N}\vec{d} = \vec{N}\dot{\vec{d}} = \left(\Theta_\perp \vec{\omega} + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)(\vec{d}\vec{\omega})\vec{d}\right) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{d}) = 0$

$\rightsquigarrow \underline{\vec{N}\vec{d} = |\vec{N}| \cdot \cos\vartheta = \text{const.}}\ (*)$

$\vec{N}\vec{d} = \Theta_\perp \vec{\omega}\vec{d} + (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)(\vec{\omega}\vec{d}) = \Theta_\parallel (\vec{\omega}\vec{d}) = \text{const.}$

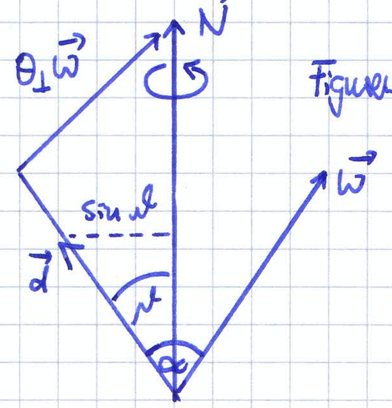
$\rightsquigarrow \underline{\vec{\omega}\vec{d} = |\vec{\omega}| \cos\alpha = \text{const.}}\ (*)$

$$\dot{\vec{d}} = \vec{\omega} \times \vec{d} = \underbrace{\frac{\vec{N} - (\Theta_\parallel - \Theta_\perp)(\vec{d}\vec{\omega})\vec{d}}{\Theta_\perp}}_{\vec{\omega} \text{ aus (I)}} \times \vec{d} = \frac{\vec{N} \times \vec{d}}{\Theta_\perp}$$

$$\rightsquigarrow |\dot{\vec{d}}| = |\vec{\omega}| \sin\alpha = \frac{|\vec{N} \times \vec{d}|}{\Theta_\perp} = \frac{|\vec{N}|}{\Theta_\perp} \sin\vartheta = \text{const.}$$

$\underline{|\vec{\omega}| \sin\alpha = \text{const.}}\ (*)$

Aus den drei Gln. (*) folgt damit: $|\vec{\omega}| = \text{const.}$, $\alpha = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$



Figurenachse $\vec{d}$ und $\vec{\omega}$ drehen sich um den räumlich konstanten $\vec{N}$ mit Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{F.A.} = \frac{|\dot{\vec{d}}|}{\sin\vartheta} = \frac{|\vec{N}|}{\Theta_\perp}$$