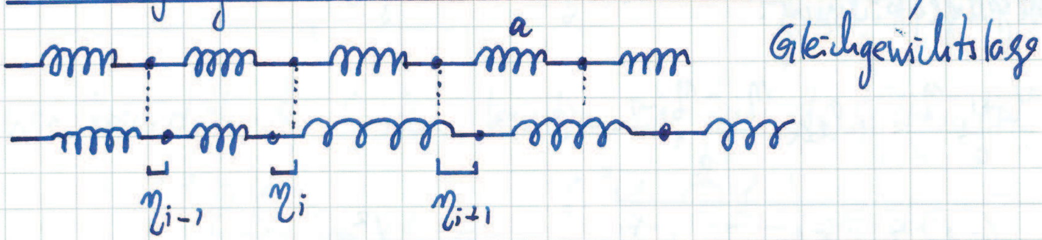
LAGRANGE- & HAMILTONFORMALISMUS FÜR KONTINUIERLICHE FELDER.

bisher: diskrete Massepunkte mit endlicher Anzahl von Freiheitsgraden
jetzt: Feldbeschreibung einer kontinuierlichen Massendichte
Bsp.: elastischer Festkörper

(1) Übergang von diskreten zu kontinuierlichen System



unendlich langer Stab mit Longitudinalschwingungen
diskrete Approximation durch unendlich lange Kette aus gleichen Massepunkten mit Gleichgewichtsabstand a und masselosen Federn mit Federkonstante k.

$$\leadsto \quad T = \frac{1}{2}\sum_i m\dot\eta_i^2 \quad \& \quad V = \frac{1}{2}\sum_i k\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)^2$$

Gesamtkraft auf Teilchen i: $F_i = k\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right) - k\left(\eta_i - \eta_{i-1}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \eta_i}$

$$\Rightarrow \text{Lagrangefunktion } L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i\left(m\dot\eta_i^2 - k\left[\eta_{i+1}-\eta_i\right]^2\right).$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i a\left(\frac{m}{a}\dot\eta_i^2 - ka\left[\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right]^2\right) = \sum_i a L_i$$

$\Rightarrow$ Lagrangesche Bewegungsgleichung: $\frac{m}{a}\ddot\eta_i - ka\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a^2} + ka\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a^2} = 0.$

Kontinuumslimes für Masse: $\frac{m}{a} \longrightarrow \mu = \left\{\begin{matrix}\text{Masse pro}\\ \text{Längeneinheit}\end{matrix}\right\}$.

Laut Hookeschem Gesetz ist Längenausdehnung proportional zur Kraft (Spannung), die auf Stab wirkt: $F = Y\xi$:
$\xi = \left\{\begin{matrix}\text{Elongation pro}\\ \text{Längeneinheit}\end{matrix}\right\}$, $Y = \left\{\begin{matrix}\text{Youngscher}\\ \text{Modul}\end{matrix}\right\}$

Nun ist Dehnung der Länge a pro Längeneinheit $\xi = \frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$

$\Rightarrow$ Kraft für Dehnung der Feder ist $F = k\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right) = ka\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$
$\leadsto$ ka entspricht dem Youngschen Modul unseres Stabes.

Index $i \to$ Variable x: $\eta_i \to \eta(x)$ und $\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} \to \frac{\eta(x+a)-\eta(x)}{a}$

im Grenzfall: $\lim_{a\to 0} \frac{\eta(x+a)-\eta(x)}{a} = \frac{d\eta}{dx}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \frac{1}{2}\int \left(\mu\dot{\eta}^2 - Y\left[\frac{d\eta}{dx}\right]^2\right) dx}}$$ kontinuierliche Lagrangefunktion des Feldes $\eta(x)$.

Lagrangesche Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{\frac{m}{a}\ddot{\eta}_i - ka\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a^2} + ka\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a^2}}_{} = 0$$

$$-\frac{Y}{a}\left(\left[\frac{d\eta}{dx}\right]_x - \left[\frac{d\eta}{dx}\right]_{x-a}\right) \longrightarrow -Y\frac{d^2\eta}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu\frac{d^2\eta}{dt^2} - Y\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0}}$$ Genauer: $\eta = \eta(x,t)$ Feldgrösse

x übernimmt die Rolle des Index i und ist keine generalisierte Koordinate wie die η.

3-dim Fall: $L = \iiint \mathcal{L}\, dx\,dy\,dz$ mit Lagrangedichte $\mathcal{L}$

$$\underline{\underline{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mu\left[\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]^2 - Y\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\right]^2\right)}}.$$ für Bsp. des Stabes

(2) Lagrangeformalismus für kontinuierliche Systeme.

allg. Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial z}, \frac{\partial\eta}{\partial t}, x, y, z, t\right)$.

kont. Systeme: Bewegungsgleichungen werden durch $\mathcal{L}$ formuliert.

Analog zum Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta I = \delta \int_1^2 \iiint \mathcal{L}\, dx\,dy\,dz\,dt = 0.$$

NB: In dieser Feldformulierung bleiben die x, y, z sowie t unberührt von der Variation des Wirkungsintegrals. Wissen bereits, dass $\delta \to dx\frac{\partial}{\partial x}$

entspricht.

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_1^2 \iiint \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)\right] dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt = 0.$$

Wie beim diskrete System benutzen wir partielle Integration:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}\delta\dot{\eta}\,dt = -\int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}\right)\delta\eta\,dt.$$

Ausserdem $\displaystyle\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)dx_k = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x_k}\,dx_k$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\delta\eta\right]_1^2}_{=0} - \int \frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\right)\delta\eta\,dx_k$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_1^2 \iiint \delta\eta\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\right)\right]dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt$$
$$= 0.$$

Variation $\delta\eta(x_1, x_2, x_3, t)$ unabhängig

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} + \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{Bewegungsgleichungen}$$

---

diskretes System mit f Freiheitsgraden $\Rightarrow$ f Lagrangegleichungen

Kontinuum: "nur" eine Bewegungsgleichung, aber mit partiellen Ableitungen für das Feld η.

Stab: nur ein η. Für 3D Auslenkung η_1, η_2, η_3

Allgemeiner Fall: zu jedem $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$ gehört die Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} + \sum_k \frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Funktionale Ableitung:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}\right)}\right)$$

$\mathcal{L}$ hängt nicht von Gradienten von $\dot{\eta}_j$ ab $\rightsquigarrow$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i}$$

In dieser Schreibweise: $$\underline{\underline{\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} - \frac{\delta L}{\delta \eta_j} = 0.}}$$

Bsp. Elastischer Stab Hatten $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mu\left[\frac{\partial \eta}{\partial t}\right]^2 - Y\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = \mu \dot{\eta}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} = -Y\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$ konsistent mit vorigem Erg.

$\Rightarrow$ Wellengleichung mit Geschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$.

(longitudinale elastische Welle).

Bsp. Schallschwingungen in Gasen.

Longitudinalschwingungen $\leadsto$ Schallfeld $\Rightarrow$ suchen Wellengleichung für Schallausbreitung: Dichteformulierung $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$; Auslenkungsfeld $\vec{\eta}$

Dichte der kinet. Energie: $\mathcal{T} = \frac{\mu_0}{2} \dot{\vec{\eta}}^2 = \frac{\mu_0}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2\right)$

μ_0: Gleichgewichtsdichte; Ann.: Auslenkungen klein

Gleichgewichtsdruck P_0

Thermodynamik für adiabatische Kontraktion/Expansion (kein Temperaturausgleich im Gas): $PV^\gamma = C$: γ = Adiabatenexponent

$$\mathcal{V} = -P_0 \nabla\cdot\vec{\eta} + \frac{\gamma P_0}{2}\left(\nabla\cdot\vec{\eta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mu_0 \dot{\vec{\eta}}^2 + 2P_0 \nabla\cdot\vec{\eta} - \gamma P_0 \left(\nabla\cdot\vec{\eta}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \text{Lagrangegl.:} \quad \mu_0 \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} - \gamma P_0 \frac{\partial(\nabla\cdot\vec{\eta})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,3$$

oder $\quad \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\eta}}{\partial t^2} - \gamma P_0 \nabla \nabla\cdot\vec{\eta} = 0$

relative Änderung der Dichte σ: $\mu = \mu_0(1+\sigma)$ & $-\mu_0 \int \sigma\, dV = \mu_0 \int \vec{\eta}\cdot d\vec{A}$

Divergenzsatz: $-\int \sigma\, dV = \int \nabla\cdot\vec{\eta}\, dV$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\nabla^2\sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0}} \qquad v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}.$$

(3) Hamiltonformalismus für kontinuierliche Felder

lineare Kette mit diskreten Massenpunkten: kanon. konj. Impuls zu η_i:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}$$

$$\Rightarrow H = \sum_i p_i \dot{\eta}_i - L = \sum_i a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L = \sum_i a\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L_i\right).$$

Kontinuumsübergang: $L_i \to \mathcal{L}$

$$H = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathcal{L} \right) dx$$

Impulsdichte $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}$$

Allgemeiner Fall: $\underline{\underline{H = \iiint \mathcal{H}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint \left(\sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{L} \right) dx_1\, dx_2\, dx_3}}$ (**)

$$\text{mit } \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_i}$$

Infinitesimale Änderung von H:

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} d\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right] \times$$
$$\times\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Partielle Integration (Terme verschwinden im ∞):

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) d\eta_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right] dx_1\, dx_2\, dx_3$$

mit Funktionalableitung:

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} d\eta_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} d\pi_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right] dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad (*)$$

Alternativ können wir schreiben (mit (**)):

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\pi_k d\dot{\eta}_k + \dot{\eta}_k d\pi_k - \frac{\delta L}{\delta \eta_k} d\eta_k - \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} d\dot{\eta}_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right] dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$= 0$ laut Def. π_k

aus Lagrangegleichung folgt ausserdem:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_k} = \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} = \dot{\pi}_k$$

$$\Rightarrow dH = \iiint \left[\sum_k \left(-\dot{\pi}_k \, d\eta_k + \eta_k \, d\pi_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (***)$$

Vergleich von (*) mit (***):

$$\underline{\underline{\frac{\delta H}{\delta \eta_k} = -\dot{\pi}_k \quad \text{und} \quad \frac{\delta H}{\delta \pi_k} = \eta_k}} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Analoge Gleichung für $\mathcal{H}$ wirkt asymmetrisch:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} - \sum_j \frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) = -\dot{\pi}_k \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} = \eta_k$$

<u>Bsp Schallschwingungen</u> Impulsdichte $\pi_k = \mu_0 \dot{\eta}_k$ bzw $\vec{\pi} = \mu_0 \dot{\vec{\eta}}$

mit vorigen Erg: $\mathcal{H} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{\eta}} - \mathcal{L} = \frac{\vec{\pi}^2}{2\mu_0} + \frac{P_0 \gamma}{2} (\nabla \cdot \vec{\eta})^2 = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{E}$

$\equiv$ Energiedichte

Kanon. Gln.: $\dot{\eta}_k = \frac{\pi_k}{\mu_0}$ & $-\dot{\pi}_k = -\frac{d}{dx_k}\left(P_0 \gamma \, \nabla \cdot \vec{\eta} \right)$ ident. mit Wellengl. vorher

<u>(4) Poissonklammern</u>

Hamiltonsches Prinzip $\delta \int_1^2 \iiint \left(\sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{H} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \, dt = 0$

$\Rightarrow$ Ausserdem ist

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\underset{\text{kanon. Gln.}}{=} \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{dH}{dt} = \iiint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\, dx_1\, dx_2\, dx_3}}$$ H Erhaltungsgrösse, falls nur $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$.

Betrachte Feldgrösse G mit Dichte $\mathcal{G}$: $G = \iiint \mathcal{G}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = G(\eta_k, \pi_k$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dt} = \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) dx_1\, dx_2\, dx_3 \equiv \{G, H\}$$

$$\underline{\underline{\frac{dG}{dt} = \{G, H\}}}.$$

Hängt G explizit von der Zeit ab: $\frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}$.