Druck, Dichte, Temperatur.

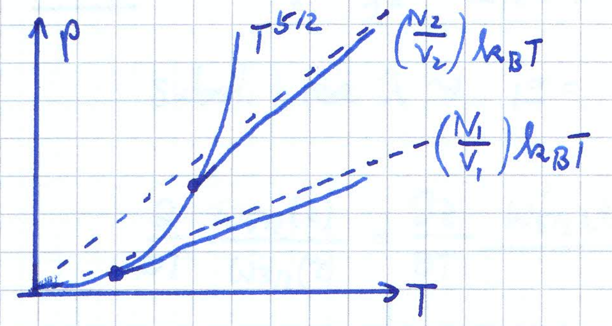
feste Dichte unterhalb kritischer Temp. $T_c \rightsquigarrow z=1$ und

$$p = \frac{k_B T}{\lambda^3} w_{5/2}(1) = \frac{k_B T}{\lambda^3} \zeta(5/2) \Rightarrow p \sim T^{5/2}$$ unabhängig von Gasdichte!

$T > T_c$: $\bar{n}\lambda^3 = w_{3/2}(z) \wedge p = \frac{k_B T}{\lambda^3} w_{5/2}(z)$

$T \gg T_c \Rightarrow z \to 0 \rightsquigarrow w_n(z) \sim z \Rightarrow p = \frac{k_B T}{\lambda^3} z = \frac{k_B T}{\lambda^3}(\bar{n}\lambda^3) = \frac{k_B T N}{V}$

klass. ideales Gas

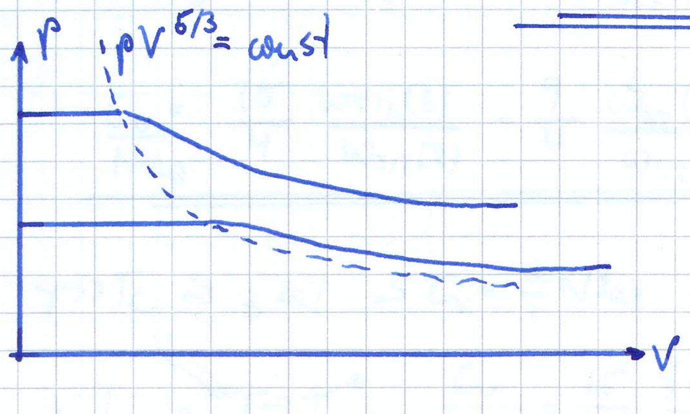


feste Temperatur: kleine Dichte $\rightsquigarrow z \to 0 \Rightarrow pV = N k_B T$ klass. id. Gas
hohe Dichte: $z=1$ wird erreicht $\Rightarrow p = \frac{k_B T}{\lambda^3}\zeta(5/2)$ Druck bleibt für weitere Erhöhung der Dichte konstant
Gleichzeitig wird Anteil der Teilchen im Grundzustand erhöht $\Rightarrow$ Phasenübergang, Bose-Einstein-Kondensation. NB: Kondensation im Impulsraum.

Grenzkurve, bei der Besetzung des Grundzustands makroskopisch relevant wird:
N, T sollen konst. sein $\rightsquigarrow$ kritisches Volumen V_c, bei dem $z=1$ erreicht wird:

$$\bar{n}\lambda^3 = \zeta(3/2) \rightarrow V_c = N\lambda^3/\zeta(3/2)$$

mit $p = k_B T\,\zeta(5/2)/\lambda^3 \Rightarrow \underline{\underline{p V_c^{5/3} = \frac{h^2}{2\pi m}\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} N^{5/3}}}$



Kalorische Zustandsgleichung

mit Definition $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}$ und für $T < T_c$ konstante Fugazität z

$\Rightarrow$ mit $z=1$ folgt $E = \frac{3}{2} \frac{V k_B T}{\lambda^3} \zeta(5/2)$

$$\Rightarrow C_V = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\bar{n} \lambda^3} \sim T^{3/2}$$

$T > T_c$: $E = \frac{3}{2} \frac{V k_B T}{\lambda^3} \omega_{5/2}(z) \wedge N = \frac{V}{\lambda^3} \omega_{3/2}(z)$

substituiere $\lambda \rightsquigarrow E = \frac{3}{2} N k_B T \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} \rightsquigarrow \frac{C_V}{N k_B} = \frac{3}{2} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} + \frac{3}{2} T \frac{\partial}{\partial T} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(t)}$

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} = \frac{\partial z}{\partial T} \frac{\omega'_{5/2}(z)\, \omega_{3/2}(z) - \omega'_{3/2}(z)\, \omega_{5/2}(z)}{(\omega_{3/2}(z))^2}$$

$$z \frac{\partial \omega_n(z)}{\partial z} = \omega_{n-1}(z)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial T} \left\{ \frac{1}{z} \left(1 - \frac{\omega_{1/2}(z)\, \omega_{5/2}(z)}{(\omega_{3/2}(z))^2} \right) \right\}$$

ausserdem: $\frac{\partial}{\partial T} \omega_{3/2}(z) = \frac{\partial}{\partial T} \bar{n} \lambda^3 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \omega_{3/2}(z) = \frac{\partial z}{\partial T} \omega'_{3/2}(z) = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \omega_{1/2}(z)$

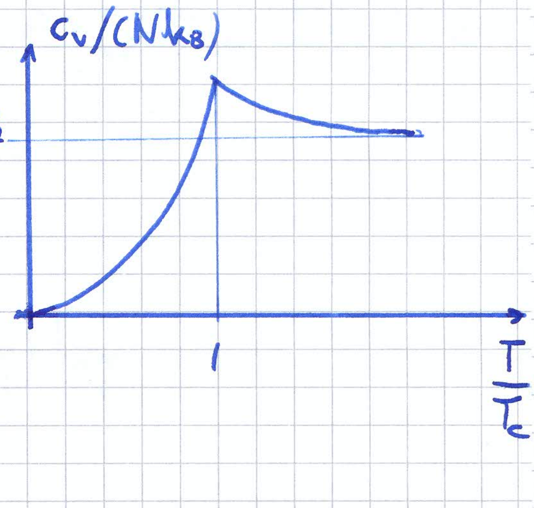
und $\frac{\partial}{\partial T} \bar{n} \lambda^3 = -\frac{3}{2T} \bar{n} \lambda^3 = -\frac{3}{2T} \omega_{3/2}(z)$

$\lambda = h^2/(2\pi m k_B T)$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3z}{2T} \frac{\omega_{3/2}(z)}{\omega_{1/2}(z)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_V}{N k_B} = \frac{3}{2} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{\omega_{3/2}(z)}{\omega_{1/2}(z)} \left(1 - \frac{\omega_{1/2}(z)\, \omega_{5/2}(z)}{(\omega_{3/2}(z))^2} \right)$$

$$\frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{\omega_{3/2}(z)}{\omega_{1/2}(z)}$$



$T \gg T_c \rightsquigarrow z \ll 1 \Rightarrow C_V = \frac{3}{2} N k_B$ klassisches Erg.

$z = 1$, i.e. $T \to T_c^+$: $\frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \approx 1.925$

4.6. Das ideale Fermigas. $-\infty < \mu < \infty$ wie gesehen

jeder Zustand maximal einfach besetzt, allerdings $\exists$ Entartung durch innere Freiheitsgrade, von denen ε_k unabhängig ist. z. Bsp. Spin $s>0$ $\Rightarrow$ Entartung $\bar{g} = 2s+1$

Gesamtteilchenzahl: $N = \sum_k \bar{n}_k = \int_0^\infty g(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}+1} + O$ max $\bar{g}$ Teilchen im Grundzustand, die im thermodyn. Limes irrelevant werden

$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ & $g(\varepsilon) = \bar{g}\, \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\, \varepsilon^{1/2}$

Grosses Potential: $\Omega = -k_B T \int_0^\infty g(\varepsilon) \log\left(1+ze^{-\beta\varepsilon}\right) d\varepsilon \stackrel{\text{P.I.}}{=} -\bar{g}\, \frac{4\pi V}{3h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{1+z^{-1}e^{\beta\varepsilon}}$

Innere Energie: $E = \bar{g}\, \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{1+z^{-1}e^{\beta\varepsilon}}$

mit $\sigma_n(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{z^{-1}e^x+1}$

$$\Rightarrow N = \bar{g}\, \frac{V}{\lambda^3} \sigma_{3/2}(z); \quad \Omega = -\bar{g}\, k_B T\, \frac{V}{\lambda^3}\sigma_{5/2}(z); \quad E = \frac{3\bar{g} k_B T}{2} \frac{V}{\lambda^3} \sigma_{5/2}(z)$$

Eigenschaften von $\sigma_n(z)$.

ist $z<1$: $\frac{1}{z^{-1}e^x+1} = ze^{-x}\frac{1}{1+ze^{-x}} \stackrel{z<1\ \&\ x\geq 0}{=} ze^{-x}\sum_{l=0}^\infty \left(-ze^{-x}\right)^l = \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} z^l e^{-lx}$

$$\leadsto \sigma_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} z^l e^{-lx} x^{n-1}\, dx \stackrel{y=lx}{=} \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy}_{\Gamma(n)}$$

$$= \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^n}.$$

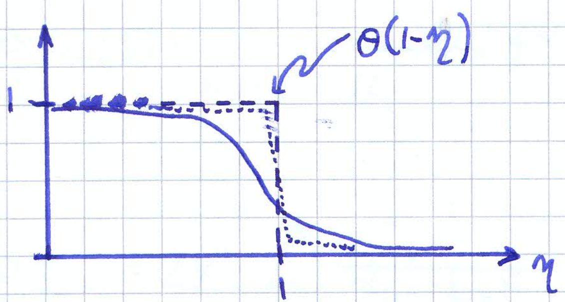
$\Rightarrow \sigma_n(z) \approx z, \quad z \ll 1$

$z \gg 1$: $\quad y = \log z = \beta\mu \Rightarrow \Gamma(n)\,\sigma_n(z) = \int_0^\infty x^{n-1}\left(\Theta(y-x) + \left(\frac{1}{e^{x-y}+1} - \Theta(y-x)\right)\right) dx$

$$= \frac{y^n}{n} + I_{n-1}:$$

$$I_{n-1} \doteq \int_0^\infty x^{n-1}\left(\frac{1}{e^{x-y}+1} - \Theta(y-x)\right) dx$$

mit $x = y\eta$: $\frac{I_{n-1}}{y^n} = \int_0^\infty \eta^{n-1}\left(\frac{1}{e^{y(\eta-1)}+1} - \Theta(1-\eta)\right) d\eta$



— $y=5$
...... $y=100$

reduzierte Fermiverteilung $\frac{1}{e^{y(\eta-1)}+1}$

ist y sehr gross, so ist die Differenz $\frac{1}{e^{y(\eta-1)}+1} - \Theta(1-\eta)$ sehr klein & $\frac{I_{m+1}}{y^m} \xrightarrow{y\to\infty} 0$

$\rightsquigarrow$ Reiheentwicklung in y^{-1}

Dazu starten wir mit $I_m = \int_0^y x^m \left(\frac{1}{e^{x-y+1}} - 1\right) dx + \int_y^\infty x^m \frac{1}{e^{x-y}+1} dx$

$$= -\int_0^y \frac{x^m}{e^{y-x}+1} dx + \int_y^\infty \frac{x^m}{e^{x-y}+1} dx$$

$$= -\underbrace{\int_0^y \frac{(y-u)^m}{e^u+1} du}_{\approx -\int_0^\infty \dots du} + \int_0^\infty \frac{(u+y)^m}{e^u+1} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(y+u)^m - (y-u)^m}{1+e^u} du \overset{\xi \equiv y^{-1}}{=} y^m \underbrace{\int_0^\infty \frac{(1+\xi u)^m - (1-\xi u)^m du}{1+e^u}}_{\equiv J(\xi)}$$

$J(\xi)$ entwickeln: k. Abl.: $J_m^{(k)}(0) = \frac{2m!}{(m-k)!} \int_0^\infty \frac{u^k}{1+e^u} du$, k ungerade

$= 0$ k ~~un~~gerade

verbleibt: $L_k = \int_0^\infty \frac{u^k}{1+e^u} du$

für $u \geq 0$ gilt $\frac{1}{1+e^u} = \frac{e^{-u}}{1+e^{-u}} = e^{-u} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l e^{-lu} = \sum_{l=0}^\infty (-1)^{l-1} e^{-lu}$

$\Rightarrow L_k = \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \int_0^\infty u^k e^{-lu} du = \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{1}{l^{k+1}} \underbrace{\int_0^\infty v^k e^{-v} dv}_{\Gamma(k+1)}$

$$= k! \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l-1}}{l^{k+1}} = k! \underbrace{\left(\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^{k+1}} - 2\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{(2l)^{k+1}}\right)}_{\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\zeta(k+1)}$$

$$= k! \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \zeta(k+1)$$

$\Rightarrow \forall$ k ungerade ist $J_m^{(k)}(0) = \frac{2m!\,k!}{m-k!} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \zeta(k+1)$

$$\Rightarrow J_m(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_m^{(k)}(0)}{k!}\,\xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,m!}{\Gamma(m-2k)}\left(1-\frac{1}{2^{2k+1}}\right)\zeta(2k+2)\,\xi^{2k+1}$$

nur ungerade k

$$\Rightarrow I_{n-1} = 2y^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-2k+1)}\left(1-\frac{1}{2^{2k-1}}\right)\zeta(2k)\,y^{-2k}$$

Diese Reihe hat Probleme bei der Konvergenz, man kann aber zeigen, dass die ersten Terme eine gute Beschreibung liefern (NB: I_{n-1} existiert):

$$I_{n-1} \doteq y^n\left([n-1]\,\zeta(2)\,y^{-2} + \frac{7(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\,\zeta(4)\,y^{-4} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_n(z) \approx \frac{(\log z)^n}{\Gamma(1+n)}\left(1 + n(n-1)\,\zeta(2)\,(\log z)^{-2} + \dots\right) \qquad (*)$$

Ausserdem gilt mit

$$\underline{\underline{z\frac{\partial \sigma_n(z)}{\partial z}}} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} z\frac{\partial}{\partial z}\frac{x^{n-1}\,dx}{z^{-1}e^x+1} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}z^{-1}e^x}{(z^{-1}e^x+1)^2}\,dx$$

$$\overset{\underline{P.I.}}{=} \frac{1}{\Gamma(n)}\left\{\left[-\frac{x^{n-1}}{(z^{-1}e^x+1)}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{(n-1)\,x^{\cancel{n-2}}\,dx}{(z^{-1}e^x+1)}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\frac{(n-1)\,x^{n-2}}{z^{-1}e^x+1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\infty}\frac{x^{n-2}}{z^{-1}e^x+1}\,dx = \underline{\underline{\sigma_{n-1}(z)}}$$

<u>Thermische Zustandsgleichung.</u>

Mit $\Omega = -pV$; $N = \bar{g}\frac{V}{\lambda^3}\sigma_{3/2}(z)$; $\Omega = -\bar{g}k_BT\frac{V}{\lambda^3}\sigma_{5/2}(z)$; $E = \frac{3\bar{g}k_BTV}{2\lambda^3}\sigma_{5/2}(z)$

$$\Rightarrow pV = \frac{2}{3}E = Nk_BT\,\frac{\sigma_{5/2}(z)}{\sigma_{3/2}(z)}.$$

Mit $\bar{n} = N/V$ folgt ebenfalls $\bar{g}\,\sigma_{3/2}(z) = \bar{n}\lambda^3$. Wir hatten $\sigma_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l z^l/l^n$

$$\Rightarrow z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \approx \frac{1}{\bar{g}}\bar{n}\lambda^3 \quad \text{bzw.} \quad z \approx \frac{1}{\bar{g}}\bar{n}\lambda^3 + \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

nullte & erste Näherung: $z^{(0)} = \frac{1}{\bar{g}}\bar{n}\lambda^3$; $\quad z^{(1)} = \frac{1}{\bar{g}}\bar{n}\lambda^3 + \frac{1}{2^{3/2}}\left[\frac{1}{\bar{g}}\bar{n}\lambda^3\right]^2$

Aus $z = e^{\beta\mu}$ folgt in dieser Näherung:

$$\mu = k_BT\log z \approx k_BT\left(\log\left(\frac{1}{\bar{g}}\bar{n}\lambda^3\right) + \frac{1}{2^{3/2}}\frac{1}{\bar{g}}\bar{n}\lambda^2\right) \quad \text{mit } \log(1+x) \approx x$$

Diese Näherung von z verlangt offenbar $\bar{n}\lambda^3 \ll$ oder wegen $\lambda \sim T^{-1/2}$ bedeutet das hohes T und/oder niedriges $\bar{n}$. Für solch kleine z hatten wir $\sigma_n(z) \approx z$

$\Rightarrow pV \approx N k_B T$ verdünntes Fermigas bei hoher Temperatur wie ideales Gas.

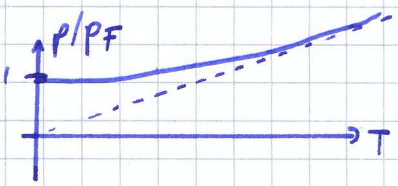
Mit $z^{(1)}$ lässt sich auch eine Korrektur angeben.
Umgekehrter Fall mit $\bar{n}\lambda^3 \gg 1$ folgt mit (*) (vorige Seite):

$$pV \approx N k_B T \frac{\Gamma(1+3/2)(\log z)^{5/2}}{\Gamma(1+5/2)(\log z)^{3/2}} = \frac{2}{5} N k_B T \log z = \frac{2}{5} N\mu$$

Um μ zu bestimmen, benutzen wir (*) und $\bar{g}\,\sigma_{3/2}(z) = \bar{n}\lambda^3 \Rightarrow \bar{n}\lambda^3 \approx \bar{g}\,\frac{(\log z)^{3/2}}{\Gamma(1+3/2)}$

$$\Rightarrow \log z = \frac{\mu}{k_B T} \approx \left(\frac{\Gamma(5/2)\bar{n}\lambda^3}{\bar{g}}\right)^{2/3} = \left(\frac{\Gamma(5/2)\bar{n}}{\bar{g}}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k_B T} \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{h^2/2\pi m k_B T}$$

$$\Rightarrow \mu \approx \left(\frac{3\bar{n}}{4\pi \bar{g}}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \quad \text{mit } \Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$



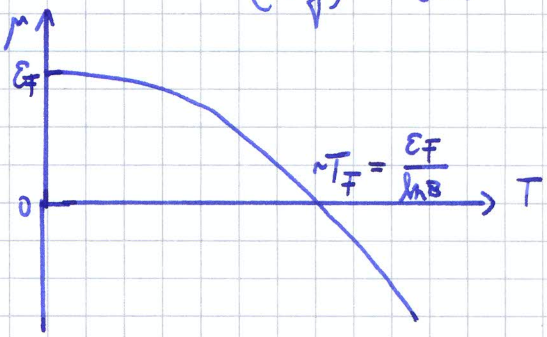
Damit folgt $p = p_F = \frac{2}{5}\left(\frac{\Gamma(5/2)}{\bar{g}}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m}\, \bar{n}^{5/3} \sim \bar{n}^{5/3}$ <u>unabh. von T!</u>

$\Rightarrow$ Alle Zustände unterhalb Fermienergie ε_F sind besetzt und damit tragen sie zum Druck bei, anders als bei Bosonen.

Mit $\overset{T=0!}{N} = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \bar{g}\,\frac{4\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon_F^{3/2} \Rightarrow \varepsilon_F = \left(\frac{3\bar{n}}{4\pi\bar{g}}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

Also $\lim_{T\to 0} \mu = \varepsilon_F$

$\bar{n}\lambda^3 \gg$ wird als entartetes Fermigas bezeichnet.



<u>Wärmekapazität des Fermigases.</u>

$\sigma_n(z)$ hat identische Rekursionsregel wie ω_n; pV und E sind unter Vertauschung von σ_n und ω_n für Fermionen & Bosonen identisch $\Rightarrow$

$$\frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4}\frac{\sigma_{5/2}(z)}{\sigma_{3/2}(z)} - \frac{9}{4}\frac{\sigma_{3/2}(z)}{\sigma_{1/2}(z)}$$

Für hohe T & $\bar{n}\lambda^3 \ll 1$ gilt $C_V = \frac{3}{2} N k_B$ klassisches Erg.